

1^{ère} ES3 - Devoir surveillé de mathématiques

Jeudi 1^{er} février 2007 durée : 2 heures

Exercice 1

On donne les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = 4 - 2x$ et $g(x) = 2x^2 - 7$.

1. Soit h la fonction composée « f suivie de g ». Déterminer l'expression de h (sous forme développée et réduite).
2. Dresser les tableaux de variations complets de f et de g sur \mathbb{R} (en justifiant succinctement).
3. En déduire les variations de la fonction h sur $]2; +\infty[$, puis sur $] -\infty; 2]$. (Justifier avec soin : faites attention aux ensembles de définition).

Exercice 2

On se donne les trois fonctions polynômes du second degré suivantes :

$$f(x) = x^2 - 3x - 2 \quad g(x) = -2x^2 + x \quad h(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

1. Mettre ces trois polynômes sous forme canonique.
2. Associer à chacune de ces fonctions la parabole qui la représente (voir annexe) (Justifier le plus simplement possible votre réponse).
3. Résoudre dans \mathbb{R} les équations $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ et $h(x) = 0$. (Donner les valeurs exactes des solutions - s'il y en a !)
4. Déterminer par le calcul les abscisses exactes des points d'intersection des paraboles \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_3 .

Exercice 3

Début 2003, Klow, la capitale syldave, comptait 12000 habitants. En Janvier 2004, on s'aperçoit que Klow a perdu un certain pourcentage (noté t) de sa population qui a fui vers la Bordurie voisine. Mais l'année suivante, les émigrants se sont aperçu que la vie était pire en Bordurie et reviennent en fraude avec quelques Bordures et Klow voit ainsi sa population croître de nouveau : en Janvier 2005, elle a gagné $(2t)\%$ en population par rapport à Janvier 2004. Elle compte ainsi, en Janvier 2005, 12285 habitants

1. Déterminer (en fonction de t) le coefficient multiplicateur correspondant à une diminution de population de $t\%$ suivie d'une augmentation de $(2t)\%$.
2. Expliquer avec soin pourquoi t est solution de l'équation $-2.4t^2 + 120t - 285 = 0$ (si vous trouvez une autre équation dont t est solution, vous pouvez bien entendu la donner ici, en justifiant avec soin)
3. Calculer le pourcentage t sachant que la population de la ville n'est jamais descendue en-dessous des 10000 personnes.
4. Un syldave mesure 1m88, fume 1 paquet de Zrälükz par jour : calculer le pourcentage de mots d'origine bordure dans la phrase « Czesztot wzryzkar nietz on waghabontz! Czesztot bätczer yhzet kzömmetz noh dascz gendarmaskaïa »

Exercice 4

Dans une urne, on a placé 12 boules de couleur et portant chacune un numéro. Les boules sont indiscernables au toucher et réparties comme suit :

- 4 boules blanches portant les numéros 1, 2, 3 et 4.
- 3 boules rouges portant les numéros 1, 2 et 3.
- 5 boules vertes portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5.

On tire au hasard une boule de l'urne. On notera chaque éventualité par l'initiale de la couleur de la boule suivie du numéro de la boule.

1. Écrire l'univers sous la forme d'un ensemble ($\Omega = \{\dots; \dots\}$).
2. Calculer la probabilité des événements suivants (on commencera par écrire les événements sous forme d'ensembles) :
 - A : « la boule tirée porte un numéro pair ».
 - B : « la boule tirée n'est pas blanche ».
 - C : « la boule tirée porte un numéro strictement plus grand que 2 ».

Exercice 5

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes, en détaillant toutes les étapes de la résolution :

a) $-2x^2 + 3x - 5 > 0$ b) $(2x + 3)^2 \leq 4$ c) $\frac{-x^2 + 5x + 14}{x - 1} < 0$

Exercice 6

Une épidémie due au virus Łöžktêkh sévit dans la région de Zrãjdzs, en Syldavie, qui compte 125 000 habitants. On estime que 18 750 personnes sont contaminées par ce virus.

Une stratégie de dépistage, à l'aide d'un test biologique mis au point par le docteur Klow est mise en place. Les personnes déclarées contaminées seront ensuite envoyée en barque en Bordurie. On observe les résultats suivants :

- quand la personne est contaminée par le virus Łöžktêkh, le test est positif dans 99,6 % des cas.
- quand la personne n'est pas contaminée par le virus, le test est négatif dans 97,6 % des cas.



1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

	Nombre de personnes contaminées	Nombre de personnes non contaminées	Total
Test positif			
Test négatif			
Total			125 000

Dans les questions suivantes, les probabilités seront données à 10^{-4} près.

2. On choisit au hasard une personne de cette population, toutes les personnes ayant la même probabilité d'être choisies. On considère les événements :
- A « La personne est contaminée par le virus Łóžktêkh »
 B « La personne a un test positif ».
- Calculer la probabilité de chacun des événements A et B.
 - Écrire à l'aide d'une phrase l'événement $A \cap B$ et calculer sa probabilité.
 Écrire à l'aide des événements A et B l'événement : « la personne est contaminée par le virus Łóžktêkh ou a un test positif. » et calculer sa probabilité.
 - Calculer la probabilité p_1 que la personne ait un test positif et ne soit pas contaminée par le virus Łóžktêkh.
 Calculer la probabilité p_2 que la personne ait un test négatif et soit contaminée par le virus Łóžktêkh.
 Calculer la probabilité p_3 que le test donne un résultat faux.
3. On choisit maintenant au hasard une personne ayant un test négatif, toutes les personnes ayant la même probabilité d'être choisies.
 Quelle est la probabilité qu'elle soit contaminée par le virus Łóžktêkh ?
4. Vous rencontrez un Bordure dans la rue : quelle est la probabilité que son arrière-grand-mère ait discuté avec le ministre syldave de la santé ?

