Fonctions continues

Guillaume CONNAN

Lycée Jean PERRIN

Septembre 2007

Sommaire

Sommaire

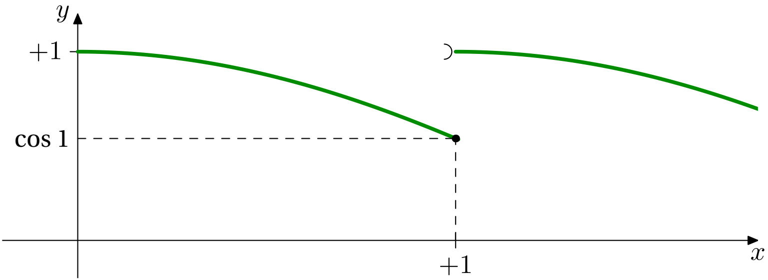
Définition

Soit a un réel, et soit f une fonction définie sur un intervalle contenant a.
On dit que ***f* est continue en *a*** lorsque $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a.

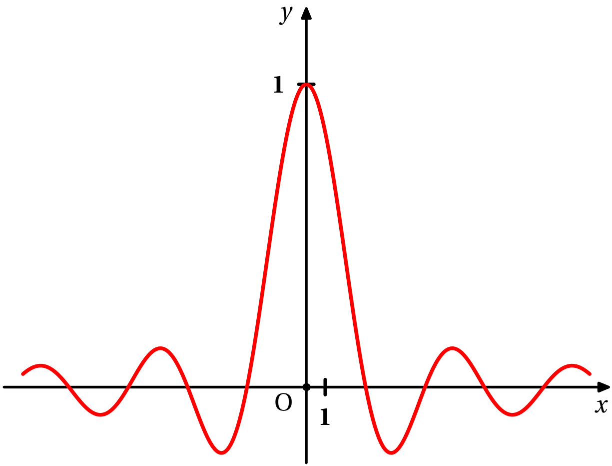
Sommaire

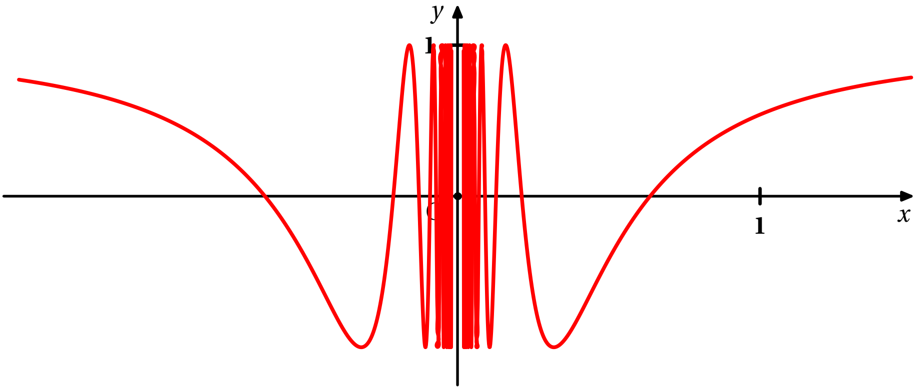
$$f_2 : [0,2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in [0,1] \\ \cos(x-1) & \text{si } x \in]1,2] \end{cases}$$

Sommaire

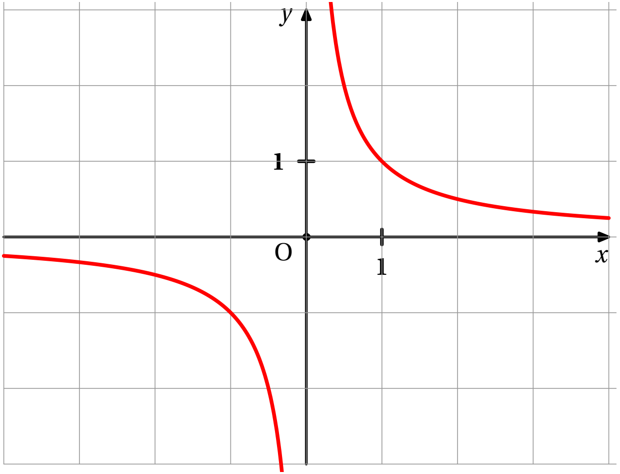


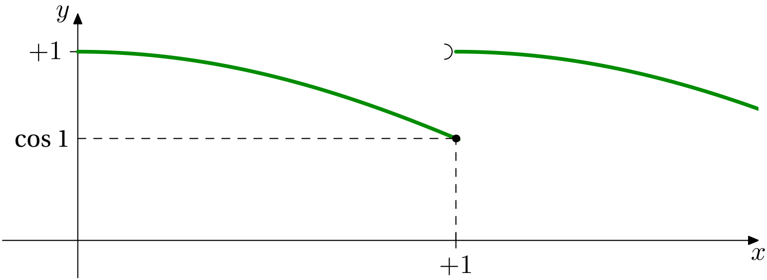
y
$+1$
$\cos 1$
$+1$
x

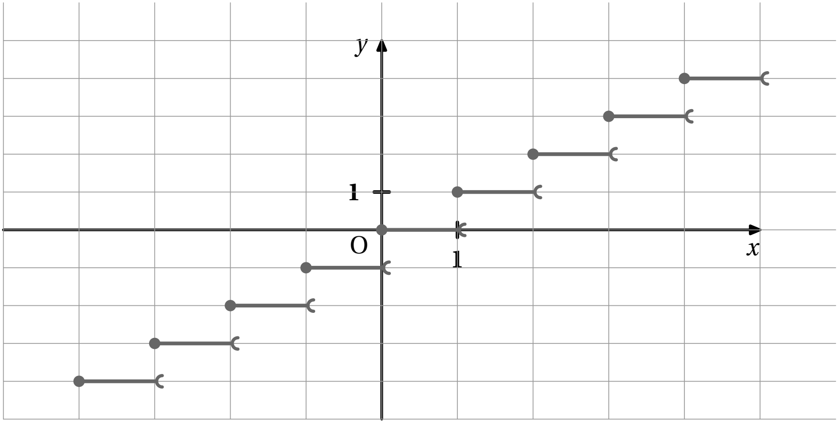

y
1
O
1
x


y
1
O
1
x

Sommaire


y
1
O
1
x

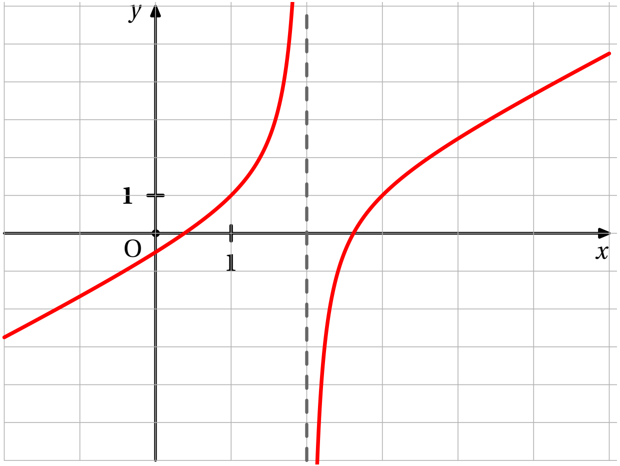

y
$+1$
$\cos 1$
$+1$
x


y
1
O
1
x

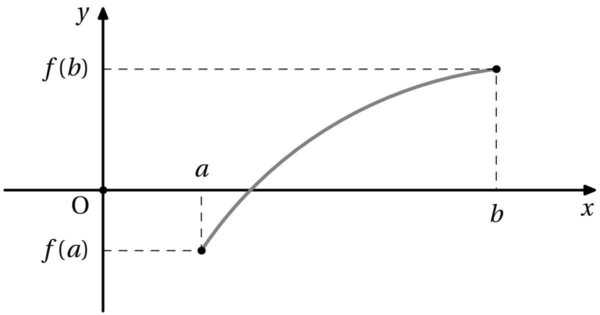
Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I vers $\mathbb{R}$. On dit que f est continue lorsque, pour tout $a \in I$, on a $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, ce qui revient à dire que f est continue en tout point de I.

$$x \mapsto \frac{x^2-3x+1}{x-2}$$

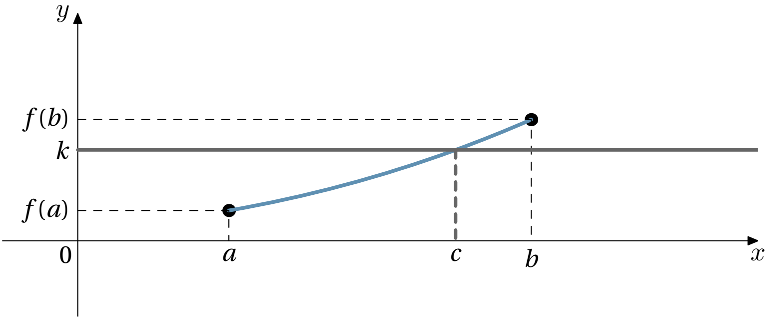


Sommaire



y
f(b)
a
O
b
x
f(a)

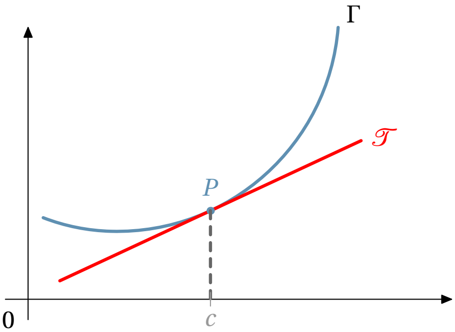
Sommaire


y
f(b)
k
f(a)
0
a
c
b
x

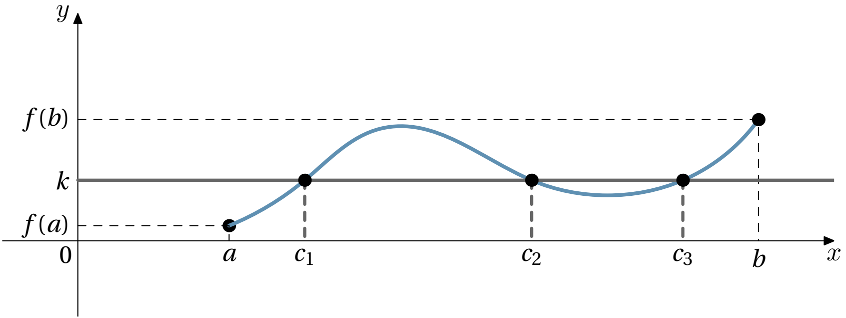
Théorème

Théorème des valeurs intermédiaires Soit f une fonction continue d'un intervalle I vers $\mathbb{R}$, et soient a et b deux éléments de I tels que $a < b$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Sommaire


Γ
𝒯
P
0
c

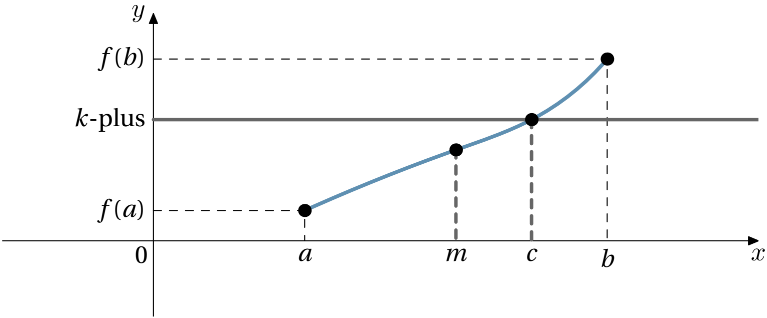
Sommaire

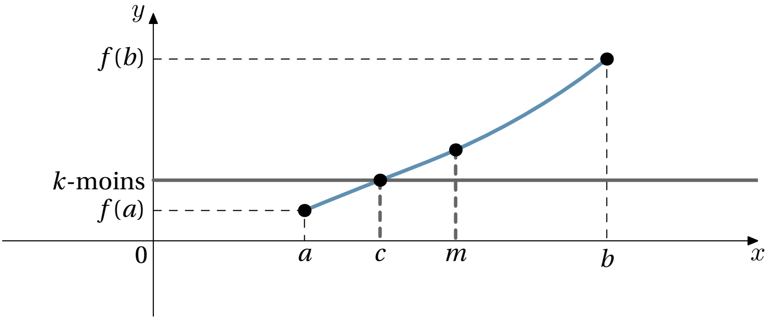

y
f(b)
k
f(a)
0
a
c1
c2
c3
b
x

Théorème

Théorème de la solution unique Soit f une fonction ***continue*** *et* ***strictement monotone*** *d'un intervalle I vers $\mathbb{R}$, et soient a et b deux éléments de I tels que $a < b$. Alors pour tout réel k* ***compris entre*** *$f(a)$ et $f(b)$, il existe un* ***unique*** *réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.*

Sommaire


y
$f(b)$
k-plus
$f(a)$
0
a
m
c
b
x


y
f(b)
k-moins
f(a)
0
a
c
m
b
x

Sommaire

```
dicho(f,p,a,b):={
local aa,bb,k;
aa:=a;
bb:=b;
k:=0; // on crée un compteur d'itérations
while( (bb-aa)>p) {
if (sign((f((bb+aa)/2)))=sign((f(bb))) ) bb:=((aa+bb)/2);
else aa:=((aa+bb)/2);
k:=k+1; // on rajoute 1 au compteur
}
return evalf((bb+aa)/2)+"est la solution trouvée après "+k+" itérations";
}:;
```

```
Digits:=30:;dicho(x->x^2-2,10^(-30),1,2)
```

`1.4142135623730950488016887242209 est la solution trouvée après 100 itérations`

A mad tea party

- Pourtant, ce n'est pas compliqué à comprendre, en voici une démonstration des plus élémentaires
  On sait que pour tout entier n on a successivement
  $$(n+1)^2 = n^2+2n+1$$
  $$(n+1)^2-2n-1 = n^2$$
  Retranchons $n(2n+1)$ des deux côtés
  $$(n+1)^2-(n+1)(2n+1) = n^2-n(2n+1)$$
  Mézalor, en ajoutant $(2n+1)^2/4$, on obtient
  $$(n+1)^2-(n+1)(2n+1)+\frac{(2n+1)^2}{4} = n^2-n(2n+1)+\frac{(2n+1)^2}{4}$$
  Soit
  $$\left((n+1)-\frac{2n+1}{2}\right)^2 = \left(n-\frac{2n+1}{2}\right)^2$$
  En passant à la racine carrée, on obtient
  $$(n+1)-\frac{2n+1}{2} = n-\frac{2n+1}{2}$$

- Parce que chez vous, 3 c'est moins que 1 ? s'indigna Alice.
- On se demande ce qu'on vous apprend à l'école ! Bien sûr que oui ! Tenez, considérez
$$f(x) = \frac{x^2+32}{2x^2+1} + \frac{|x|+1}{2x+51}$$
Eh bien il est facile de voir que cette fonction a pour limite 0 en moins l'infini et 1 en plus l'infini.
- Je ne dis pas le contraire, protesta Alice.
- Donc l'image par f de $\mathbb{R}$ est l'intervalle $]0,1[$, or $f(0)=3$, donc 3 appartient à $]0,1[$ à ce titre : on a bien 3 plus petit que 1.
- C'est de la folie pure, pensa Alice...

- Parce que chez vous, 3 c'est moins que 1 ? s'indigna Alice.
- On se demande ce qu'on vous apprend à l'école ! Bien sûr que oui ! Tenez, considérez
$$f(x) = \frac{x^2+32}{2x^2+1} + \frac{|x|+1}{2x+51}$$
Eh bien il est facile de voir que cette fonction a pour limite 0 en moins l'infini et 1 en plus l'infini.
- Je ne dis pas le contraire, protesta Alice.
- Donc l'image par f de $\mathbb{R}$ est l'intervalle $]0,1[$, or $f(0) = 3$, donc 3 appartient à $]0,1[$ à ce titre : on a bien 3 plus petit que 1.
- C'est de la folie pure, pensa Alice...

- Parce que chez vous, 3 c'est moins que 1 ? s'indigna Alice.
- On se demande ce qu'on vous apprend à l'école ! Bien sûr que oui ! Tenez, considérez
$$f(x) = \frac{x^2+32}{2x^2+1} + \frac{|x|+1}{2x+51}$$
Eh bien il est facile de voir que cette fonction a pour limite 0 en moins l'infini et 1 en plus l'infini.
- Je ne dis pas le contraire, protesta Alice.
- Donc l'image par f de $\mathbb{R}$ est l'intervalle $]0,1[$, or $f(0)=3$, donc 3 appartient à $]0,1[$ à ce titre : on a bien 3 plus petit que 1.
- C'est de la folie pure, pensa Alice...

- Parce que chez vous, 3 c'est moins que 1 ? s'indigna Alice.
- On se demande ce qu'on vous apprend à l'école ! Bien sûr que oui ! Tenez, considérez
$$f(x) = \frac{x^2+32}{2x^2+1} + \frac{|x|+1}{2x+51}$$
Eh bien il est facile de voir que cette fonction a pour limite 0 en moins l'infini et 1 en plus l'infini.
- Je ne dis pas le contraire, protesta Alice.
- Donc l'image par f de $\mathbb{R}$ est l'intervalle $]0,1[$, or $f(0) = 3$, donc 3 appartient à $]0,1[$ à ce titre : on a bien 3 plus petit que 1.
- C'est de la folie pure, pensa Alice...

- Parce que chez vous, 3 c'est moins que 1 ? s'indigna Alice.
- On se demande ce qu'on vous apprend à l'école ! Bien sûr que oui ! Tenez, considérez

$$f(x) = \frac{x^2+32}{2x^2+1} + \frac{|x|+1}{2x+51}$$

  Eh bien il est facile de voir que cette fonction a pour limite 0 en moins l'infini et 1 en plus l'infini.
- Je ne dis pas le contraire, protesta Alice.
- Donc l'image par f de $\mathbb{R}$ est l'intervalle $]0,1[$, or $f(0)=3$, donc 3 appartient à $]0,1[$ à ce titre : on a bien 3 plus petit que 1.
- C'est de la folie pure, pensa Alice...

Problème

Un chat du Cheshire parcourt 10 km en 2 heures. montrez qu'il existe un intervalle de temps de durée 1 heure pendant lequel il a parcouru exactement 5 km.

Introduisez la fonction qui à t associe le nombre de km parcourus en t heures puis la fonction $t \mapsto d(t+1) - d(t)$

Problème

Un chat du Cheshire parcourt 10 km en 2 heures. montrez qu'il existe un intervalle de temps de durée 1 heure pendant lequel il a parcouru exactement 5 km.

Introduisez la fonction qui à t associe le nombre de km parcourus en t heures puis la fonction $t \mapsto d(t+1) - d(t)$

Problème

Un chat du Cheshire parcourt 10 km en 2 heures. montrez qu'il existe un intervalle de temps de durée 1 heure pendant lequel il a parcouru exactement 5 km.

Introduisez la fonction qui à t associe le nombre de km parcourus en t heures puis la fonction $t \mapsto d(t+1)-d(t)$

Problème

Montrez que tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.

Il faut considérer la fonction polynomiale associée et chercher un théorème dans le cours qui vous permette de conclure.

Problème

Montrez que tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.

Il faut considérer la fonction polynomiale associée et chercher un théorème dans le cours qui vous permette de conclure.

Problème

Montrez que tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.

Il faut considérer la fonction polynomiale associée et chercher un théorème dans le cours qui vous permette de conclure.

Problème

Étudiez et représentez graphiquement la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f \ : \ x \mapsto \frac{E(x)}{x}$$

Problème

Soit F *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $F : x \mapsto x - E(x)$ *On rappelle que* $E(x)$ *est l'unique entier vérifiant* $E(x) \leqslant x < E(x)+1$.

Montrez que $E(x+1) = E(x)+1$ *puis que* F *est périodique. et représentez sommairement* F *sur un graphique.*

Problème

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F : x \mapsto x - E(x)$ On rappelle que $E(x)$ est l'unique entier vérifiant $E(x) \leqslant x < E(x)+1$.

Montrez que $E(x+1) = E(x)+1$ puis que F est périodique. et représentez sommairement F sur un graphique.

Problème

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F\ :\ x \mapsto x - E(x)$ On rappelle que $E(x)$ est l'unique entier vérifiant $E(x) \leqslant x < E(x)+1$.
Montrez que $E(x+1) = E(x)+1$ puis que F est périodique. et représentez sommairement F sur un graphique.

Problème

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[0,1]$. Montrez qu'il existe un réel $x_0 \in [0,1]$ vérifiant $f(x_0) = x_0$. Illustrez votre propos à l'aide d'un schéma.

Problème

Soit $x \in \mathbb{R}$. *Étudiez* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{E(-3nx)}{-2n}$

Commencez par encadrer $E(-3nx)$

Problème

Soit $x \in \mathbb{R}$. *Étudiez* $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E(kx)$

Problème

- *Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x + x$. En déduire que l'équation $\cos x + x = 0$ a une unique solution. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.*
- *On considère l'équation (E)* $\sin x - \dfrac{x}{2} = 0,\ x \in \mathbb{R}$.
    - *Montrer que toutes les solutions de cette équation appartiennent à l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$*

Problème

- *Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x + x$. En déduire que l'équation $\cos x + x = 0$ a une unique solution. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.*

- *On considère l'équation (E)* $\sin x - \dfrac{x}{2} = 0$, $x \in \mathbb{R}$.
  - *Montrer que toutes les solutions de cette équation appartiennent à l'intervalle* $[-2\ ;\ 2]$.
  - *Donner, en le justifiant, le nombre de solutions de l'équation (E).*

Problème

- *Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x + x$. En déduire que l'équation $\cos x + x = 0$ a une unique solution. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.*
- *On considère l'équation (E)* $\sin x - \dfrac{x}{2} = 0,\ x \in \mathbb{R}$.
  - *Montrer que toutes les solutions de cette équation appartiennent à l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$.*
  - *Donner, en le justifiant, le nombre de solutions de l'équation (E).*
  - *Donner une valeur approchée, à 10^{-3} près par défaut, de la plus grande solution.*

Problème

- *Étudier les variations de la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \cos x + x$. *En déduire que l'équation* $\cos x + x = 0$ *a une unique solution. En donner une valeur approchée à* 10^{-3} *près.*
- *On considère l'équation (E)* $\sin x - \dfrac{x}{2} = 0,\ x \in \mathbb{R}$.
  - *Montrer que toutes les solutions de cette équation appartiennent à l'intervalle* $[-2\ ;\ 2]$.
  - *Donner, en le justifiant, le nombre de solutions de l'équation (E).*
  - *Donner une valeur approchée, à* 10^{-3} *près par défaut, de la plus grande solution.*

Problème

- *Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x + x$. En déduire que l'équation $\cos x + x = 0$ a une unique solution. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.*
- *On considère l'équation (E)* $\sin x - \dfrac{x}{2} = 0,\ x \in \mathbb{R}$.
  - *Montrer que toutes les solutions de cette équation appartiennent à l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$.*
  - *Donner, en le justifiant, le nombre de solutions de l'équation (E).*
  - *Donner une valeur approchée, à 10^{-3} près par défaut, de la plus grande solution.*

Problème

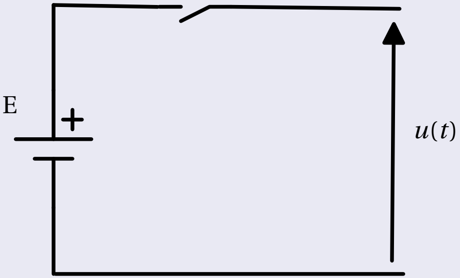
- *Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x + x$. En déduire que l'équation $\cos x + x = 0$ a une unique solution. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.*

- *On considère l'équation (E)* $\sin x - \dfrac{x}{2} = 0,\ x \in \mathbb{R}$.
  - *Montrer que toutes les solutions de cette équation appartiennent à l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$.*
  - *Donner, en le justifiant, le nombre de solutions de l'équation (E).*
  - *Donner une valeur approchée, à 10^{-3} près par défaut, de la plus grande solution.*

Problème

- *Occupons-nous de fonctions utilisées couramment en électricité*

  On considère le cicuit très simple ci-contre. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$ et on mesure la tension $U(t)$. Elle peut être définie par



$$t \mapsto U(t) = \begin{cases} E & si\ t \geqslant 0 \\ 0 & si\ \ t < 0 \end{cases}$$

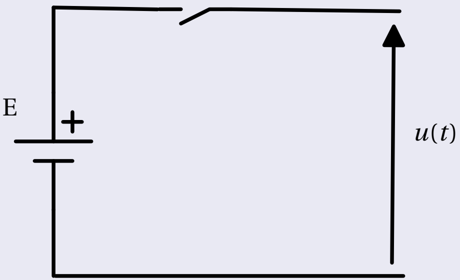
  Représentez graphiquement la fonction U.

- *On note f la fonction $f\ :\ t \mapsto U(t-2)$ et $g\ :\ t \mapsto U(t+2)$.*
  En électricité, on appelle l'une échelon retardé et l'autre échelon avancé : pourriez-vous dire qui est qui ?

Problème

- *Occupons-nous de fonctions utilisées couramment en électricité*

On considère le cicuit très simple ci-contre. On ferme l'interrupteur à l'instant $t=0$ et on mesure la tension $U(t)$. Elle peut être définie par



$$t \mapsto U(t) = \begin{cases} E & si\ t \geqslant 0 \\ 0 & si\ \ t < 0 \end{cases}$$

Représentez graphiquement la fonction U.

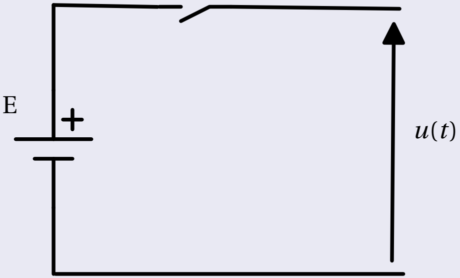
- *On note f la fonction $f\ :\ t \mapsto U(t-2)$ et $g\ :\ t \mapsto U(t+2)$.*

En électricité, on appelle l'une échelon retardé et l'autre échelon avancé : pourriez-vous dire qui est qui ?

Problème

- *Occupons-nous de fonctions utilisées couramment en électricité*

  On considère le cicuit très simple ci-contre. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$ et on mesure la tension $U(t)$. Elle peut être définie par



$$t \mapsto U(t) = \begin{cases} E & si\ t \geqslant 0 \\ 0 & si\ \ t < 0 \end{cases}$$

  Représentez graphiquement la fonction U.

- *On note f la fonction $f\ :\ t \mapsto U(t-2)$ et $g\ :\ t \mapsto U(t+2)$.*
  En électricité, on appelle l'une échelon retardé et l'autre échelon avancé : pourriez-vous dire qui est qui ?

Problème

Représentez la fonction $\Pi \ : \ x \mapsto \begin{cases} E & si\ |x| \leqslant 1/2 \\ -E & si\ \ |x| > 1/2 \end{cases}$

Donnez une interprétation physique de cette fonction si x représente la fréquence d'un signal émis par un émeteur radio.

Problème

Pour s'amuser, on fait varier le sens du courant. Représentez la fonction φ qui est de période 1 et vérifie

$$t \mapsto \varphi(t) = \begin{cases} E & si\ 0 < t < 1/2 \\ -E & si\ \ 1/2 < t < 1 \end{cases}$$

Problème

- *Soit T la fonction **paire**, de période 1, et qui vérifie, pour tout $x \in [0\,;1/2[$*

$$T(x) = E - 2Ex$$

Représentez graphiquement cette fonction et déterminez l'expression de cette fonction pour $x \in]-1/2\,;0]$

- *On considère la fonction Λ définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\Lambda \ : \ t \mapsto tU(t) - 2(t-1)U(t-1) + (t-2)U(t-2)$$

où U est la fonction de Heavyside étudée précédemment.
Représentez graphiquement cette fonction en distingant les intervalles $]-\infty\,;0[$, $[0\,;1[$, $[1\,;2[$ et $[2\,;+\infty[$.

- *Donnez un nom à la fonction suivante d, de période 1, telle que $d(x) = Ex$ pour tout $x \in [0\,;1[$.*

Problème

- *Soit T la fonction **paire**, de période 1, et qui vérifie, pour tout $x \in [0\,;1/2[$*

$$T(x) = E - 2Ex$$

Représentez graphiquement cette fonction et déterminez l'expression de cette fonction pour $x \in]-1/2\,;0]$

- *On considère la fonction Λ définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\Lambda\ :\ t \mapsto tU(t) - 2(t-1)U(t-1) + (t-2)U(t-2)$$

où U est la fonction de Heavyside étudiée précédemment.
Représentez graphiquement cette fonction en distingant les intervalles $]-\infty\,;0[$, $[0\,;1[$, $[1\,;2[$ et $[2\,;+\infty[$.

- *Donnez un nom à la fonction suivante d, de période 1, telle que $d(x) = Ex$ pour tout $x \in [0\,;1[$.*

Problème

- *Soit T la fonction* ***paire****, de période 1, et qui vérifie, pour tout* $x \in [0\,;1/2[$
$$T(x) = E - 2Ex$$
Représentez graphiquement cette fonction et déterminez l'expression de cette fonction pour $x \in]-1/2\,;0]$
- *On considère la fonction Λ définie sur $\mathbb{R}$ par*
$$\Lambda\ :\ t \mapsto tU(t) - 2(t-1)U(t-1) + (t-2)U(t-2)$$
où U est la fonction de Heavyside étudiée précédemment.
Représentez graphiquement cette fonction en distingant les intervalles $]-\infty\,;0[$, $[0\,;1[$, $[1\,;2[$ *et* $[2\,;+\infty[$.
- *Donnez un nom à la fonction suivante d, de période 1, telle que* $d(x) = Ex$ *pour tout* $x \in [0\,;1[$.

Problème

- *Soit T la fonction **paire**, de période 1, et qui vérifie, pour tout $x \in [0\,;1/2[$*

$$T(x) = E - 2Ex$$

Représentez graphiquement cette fonction et déterminez l'expression de cette fonction pour $x \in]-1/2\,;0]$

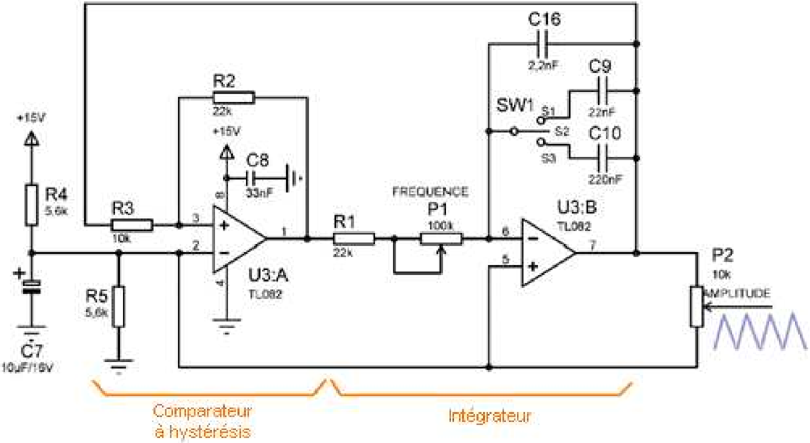
- *On considère la fonction Λ définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\Lambda \ : \ t \mapsto tU(t) - 2(t-1)U(t-1) + (t-2)U(t-2)$$

où U est la fonction de Heavyside étudée précédemment.
Représentez graphiquement cette fonction en distingant les intervalles $]-\infty\,;0[$, $[0\,;1[$, $[1\,;2[$ et $[2\,;+\infty[$.

- *Donnez un nom à la fonction suivante d, de période 1, telle que $d(x) = Ex$ pour tout $x \in [0\,;1[$.*

Rien de plus simple qu'un signal triangulaire. . .et pourtant, voici le circuit le produisant :



Problème

Les fonctions causales sont très utilisées en électricité. Il s'agit tout simplement de fonctions nulles sur $]-\infty;0]$.
Pour les exprimez, on utilise la fonction de Heaviside qu'on multiplie par des fonctions usuelles. Représentez graphiquement les fonctions suivantes

- $f_1 : x \mapsto U(x)\sin x$
- $f_2 : x \mapsto U(x)\sin(x-\pi)$
- $f_3 : x \mapsto U(x-\pi)\sin x$
- $f_4 : x \mapsto U(x-\pi)\sin(x-\pi)$

Problème

Les fonctions causales sont très utilisées en électricité. Il s'agit tout simplement de fonctions nulles sur $]-\infty;0]$.
Pour les exprimez, on utilise la fonction de Heaviside qu'on multiplie par des fonctions usuelles. Représentez graphiquement les fonctions suivantes

- $f_1 \ : \ x \mapsto U(x)\sin x$
- $f_2 \ : \ x \mapsto U(x)\sin(x-\pi)$
- $f_3 \ : \ x \mapsto U(x-\pi)\sin x$
- $f_4 \ : \ x \mapsto U(x-\pi)\sin(x-\pi)$

Problème

Les fonctions causales sont très utilisées en électricité. Il s'agit tout simplement de fonctions nulles sur $]-\infty; 0]$.
Pour les exprimez, on utilise la fonction de Heaviside qu'on multiplie par des fonctions usuelles. Représentez graphiquement les fonctions suivantes

- $f_1 \ : \ x \mapsto U(x)\sin x$
- $f_2 \ : \ x \mapsto U(x)\sin(x-\pi)$
- $f_3 \ : \ x \mapsto U(x-\pi)\sin x$
- $f_4 \ : \ x \mapsto U(x-\pi)\sin(x-\pi)$

Problème

Les fonctions causales sont très utilisées en électricité. Il s'agit tout simplement de fonctions nulles sur $]-\infty; 0]$.
Pour les exprimez, on utilise la fonction de Heaviside qu'on multiplie par des fonctions usuelles. Représentez graphiquement les fonctions suivantes

- $f_1 \ : \ x \mapsto U(x)\sin x$
- $f_2 \ : \ x \mapsto U(x)\sin(x-\pi)$
- $f_3 \ : \ x \mapsto U(x-\pi)\sin x$
- $f_4 \ : \ x \mapsto U(x-\pi)\sin(x-\pi)$

Problème

Les fonctions causales sont très utilisées en électricité. Il s'agit tout simplement de fonctions nulles sur $]-\infty;0]$.
Pour les exprimez, on utilise la fonction de Heaviside qu'on multiplie par des fonctions usuelles. Représentez graphiquement les fonctions suivantes

- $f_1 \ : \ x \mapsto U(x)\sin x$
- $f_2 \ : \ x \mapsto U(x)\sin(x-\pi)$
- $f_3 \ : \ x \mapsto U(x-\pi)\sin x$
- $f_4 \ : \ x \mapsto U(x-\pi)\sin(x-\pi)$