Mathématiques

2ale5 / 2018-2019

Mis à jour le 8 mars 2019 à 00:25

Une année de mathématiques en 2nde

Guillaume Connan

Notre Dame
LYCÉES Rezé

THÈME N° 7

Étude des signes

Les fonctions affines ont été étudiées depuis le collège.
Cette année, nous nous occuperons particulièrement de leurs signes.
Nous commencerons à étudier le signe d'expressions plus complexes.
Comme pour la résolution d'équations et d'inéquations, nous essaierons de nous ramener si possible au cas affine quand l'expression nous paraît compliquée. L'affine c'est la base...

A la fin de ce chapitre, vous devez être capable de :

— donner le sens de variation d'une fonction affine ;

— donner le tableau de signes de $ax + b$ pour des valeurs numériques données de a et b ;

— associer à un problème une expression algébrique ; mettre un problème en équation, en inéquation ;

— résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré.

Nous réutiliserons souvent les notions suivantes :

— déterminer une équation réduite de droite ;

— tracer une droite dont vous connaissez une équation réduite ;

— interpréter un coefficient directeur ;

— associer une fonction et sa représentation graphique.

1 Étude du signe d'expressions affines

1 1 Valeurs critiques d'une expression

Mathémator : Vous verrez l'an prochain, si vous passez brillamment les épreuves de cette première année d'apprentissage Mathaïe, que la plupart du temps, nous résoudrons des inéquations pour étudier des signes. Je ne parle bien sûr pas des majestueux volatiles blancs.

Secondix (à part): *Et en plus il m'impose ses blagues à deux centimes* **(tout haut)** Ah Ah Ah ! J'aimerais tant avoir votre humour.

Mathémator : Oh ! Ça me vient naturellement. Bon, revenons à nos inéquations. Avant toute étude de signe, il faudra repérer les dangers :

Définition 7 - 1

valeurs critiques
Soit $E(x)$ une expression où apparaît une variable x. Les *valeurs critiques* de l'expression $E(x)$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ sont

— les valeurs de x dans I pour lesquelles $E(x)$ s'annule (appelées *racines* de l'expression) ;

— les valeurs de x dans I pour lesquelles $E(x)$ n'existe pas (appelées *valeurs interdites* de l'expression).

Secondix: Je demande à voir...

Mathémator : Voici quelques exemples :

Exemple

Rechercher les valeurs critiques de $3x-1$ sur $\mathbb{R}$.

Il est clair $3x-1=0$ si, et seulement si, $x=\frac{1}{3}$.
D'autre part, $3x-1$ existe pour toute valeur de x dans $\mathbb{R}$.
L'expression $3x-1$ admet donc exactement une valeur critique, $\frac{1}{3}$, qui n'est pas une valeur interdite.

Exemple

Rechercher les valeurs critiques de x^2-4 sur $\mathbb{R}$.

L'équation $x^2-4=0$ équivaut à $(x-2)(x+2)=0$. Il y a donc deux racines, 2 et -2.
D'autre part, x^2-4 existe pour toute valeur de x dans $\mathbb{R}$, donc il n'y a pas de valeur interdite.
L'expression x^2-4 admet donc exactement deux valeurs critiques, 2 et -2, qui sont toutes deux des racines.

Exemple

Rechercher les valeurs critiques de $\frac{2x-5}{-x+7}$ sur $\mathbb{R}$.

L'équation $\frac{2x-5}{-x+7}=0$ équivaut à $2x-5=0$. On obtient ainsi comme première valeur critique $\frac{5}{2}$, qui est l'unique racine de cette expression.
D'autre part, $\frac{2x-5}{-x+7}$ n'existe pas quand $-x+7=0$. Pourquoi ?

Secondix: Ben on ne peut pas diviser par zéro.

Mathémator : La force est avec vous jeune Mathaïe !
On a donc une seconde valeur critique, la valeur interdite $x=7$.
En conclusion, l'expression admet 2 valeurs critiques, la racine $\frac{5}{2}$ et la valeur interdite 7.

Propriété 7 - 1

Valeur critique d'une expression affine
Soient a et b deux réels, avec $a \neq 0$. L'expression $ax+b$ admet pour unique valeur critique son unique racine $x=-\frac{b}{a}$.

1 2 Valeurs témoins et signe d'une expression

Mathémator : On se place dans un intervalle I dont les bornes a et b sont éventuellement infinies :

Théorème 7 - 1

Changement de signe et valeur critique
Une expression dépendant de la variable x ne PEUT changer de signe que de part et d'autre d'une valeur critique.

Secondix: Excusez-moi de vous interrompre mais pourquoi cela ?

Mathémator : Je suis heureux de constater que votre esprit est en alerte. La preuve de ce résultat ne pourra vous être donnée qu'en année terminale de votre cycle de formation malheureusement. Pour une explication à notre niveau actuel, nous pouvons l'obtenir pour les expressions affines.

Recherche

Démontrez le théorème précédent dans le cas d'une expression affine.
Donnez des exemples où une expression ne change pas de signe autour d'une valeur critique.

À retenir

Détermination pratique du signe d'une expression sur un intervalle
On peut découper notre intervalle en petits intervalles sans point critique.
Sur ces petits intervalles, l'expression ne change pas de signe. Il suffit donc de tester sur une valeur témoin dans chaque mini intervalle.

Secondix: Cela semble très pratique... mais en fait je n'ai rien compris.

Mathémator : Ffffffff... Bon, prenons un exemple :

Exemple

Déterminer le signe de $3x-1$ en fonction de la valeur de x sur $\mathbb{R}$

On a vu que l'expression $3x-1$ a exactement une valeur critique, $\frac{1}{3}$, qui n'est pas une valeur interdite. Il nous faut donc trouver le signe de $3x-1$ sur les intervalles $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$ et $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$.
Sur le premier intervalle, prenons la valeur témoin $x=0$. On obtient alors $30-1=-1<0$, donc l'expression est négative sur cet intervalle.
Sur le second intervalle, prenons la valeur témoin $x=1$. On obtient alors $31-1=2>0$, donc l'expression est positive sur cet intervalle. On peut résumer ces informations dans le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $3x-1$		$-$	0	$+$	

Voyons un cas plus compliqué :

Exemple

Déterminer le signe de x^2-4 en fonction de la valeur de x sur $\mathbb{R}$.

On sait que l'expression x^2-4 admet exactement deux valeurs critiques, 2 et -2, qui sont toutes deux des racines. Il faut donc déterminer son signe sur les intervalles $]-\infty;-2[$, $]-2;2[$ et $]2;+\infty[$. Pour cela on va choisir une valeur témoin dans chaque intervalle :

- sur $]-\infty;-2[$, en prenant $x=-3$ on obtient $(-3)^2-4=5>0$, donc l'expression x^2-4 est positive ;
- sur $]-2;2[$, en prenant $x=0$ on obtient $0^2-4=-4<0$, donc l'expression x^2-4 est négative ;
- sur $]2;+\infty[$, en prenant $x=3$ on obtient $3^2-4=5>0$, donc l'expression x^2-4 est positive.

On peut alors établir le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Signe de x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Et un autre avec une valeur interdite :

Exemple Déterminer le signe de $\frac{2x-5}{-x+7}$ en fonction de la valeur de x sur $\mathbb{R}$.

On sait que cette expression admet 2 valeurs critiques, la racine $\frac{5}{2}$ et la valeur interdite 7. Il faut donc déterminer son signe sur les intervalles $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right[$, $\left]\frac{5}{2};7\right[$ et $\left]7;+\infty\right[$. Pour cela on va choisir une valeur témoin dans chaque intervalle :

- sur $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right[$, en prenant $x=0$ on obtient $\frac{20-5}{-0+7}=-\frac{5}{7}<0$, donc l'expression $\frac{2x-5}{-x+7}$ est négative ;
- sur $\left]\frac{5}{2};7\right[$, en prenant $x=5$ on obtient $\frac{25-5}{-5+7}=\frac{5}{2}>0$, donc l'expression $\frac{2x-5}{-x+7}$ est positive ;
- sur $\left]7;+\infty\right[$, en prenant $x=10$ on obtient $\frac{210-5}{-10+7}=-5<0$, donc l'expression $\frac{2x-5}{-x+7}$ est négative.

On peut alors établir le tableau de signes suivant, où la valeur interdite est représentée par une double barre verticale :

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	7	$+\infty$
Signe de $\frac{2x-5}{-x+7}$			$\|\|$	

Exercices - Étude de signes / variations

Recherche 7 - 1

Build the sign tables of the following expressions, showing the computations leading to the critical values and involving the test values.

1. $2x - 5$;
2. $-3x + 4$;
3. $\frac{3}{7}x - 2$;
4. $-2 - 12x$;
5. $7 - \frac{2}{3}x$;
6. $-3 + 3x$.
7. $2 + \sqrt{2}x$;
8. $-3x + 7$.

Recherche 7 - 2

1. Quel est le sens de variation des fonctions $f : x \mapsto -x + 140$ et $g : x \mapsto -\dfrac{1}{520}x - 800$?

2. Compléter les tableaux de *signes* suivants : (on expliquera la méthode utilisée, on pourra même en utilisez deux différentes...)

x	
$-\dfrac{3}{4}x + 5$	

x	
$\dfrac{x}{7} + \dfrac{3}{5}$	

Recherche 7 - 3 Variations et signe des fonctions affines

A- Un cas particulier

On considère dans cette partie la fonction affine défnie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 5$.

1. Tracer la courbe de f à la calculatrice. Quelle semble être le sens de variation de f ?

2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

- **i.** Quel est le signe de la différence $a - b$?
- **ii.** Puisque $f(x) = 2x - 5$, le nombre $f(a)$ est égal à $2a - 5$.
  En remplacant $f(a)$ et $f(b)$ par leurs expressions, calculer et factoriser l'expression $f(a) - f(b)$.
- **iii.** En déduire le signe de $f(a) - f(b)$, puis en déduire l'ordre des nombres $f(a)$ et $f(b)$.
- **iv.** Justifier alors le sens de variation de f.

3. Déterminer les valeurs de x qui annulent $f(x)$.

4. En utilisant la question précédente et les variations de f, déterminer le signe de $f(x)$ en fonction des valeurs de x. On donnera la réponse sous forme de phrase puis sous forme de tableau de signe.

B- Le cas général

1. En traçant leurs représentations graphiques à la calculatrice, observer les variations des fonctions affines définies ci-dessous.

$$f_1(x) = -3x + 2 \qquad f_2(x) = x + 4 \qquad f_3(x) = -\tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{2}$$
$$f_4(x) = -\tfrac{12}{7}x \qquad f_5(x) = 5x - 5 \qquad f_6(x) = \tfrac{1}{3}x + 2$$

Dans la suite, on considére une fonction affine quelconque définie par $f(x) = mx + p$.

2. En s'appuyant sur les résultats de la question précédente, proposer une méthode simple pour déterminer les variations de f.

3. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

- **i.** Quel est le signe de la différence $a - b$?
- **ii.** Étudier le signe de la différence $f(a) - f(b)$ en fonction des valeurs de m.
- **iii.** En utilisant le résultat de la question précédente, ordonner les images $f(a)$ et $f(b)$ en fonction des valeurs de m.

iv. Conclure en rédigeant un théorème concernant le sens de variation d'une fonction affine quelconque.

4. Expliquer pourquoi il ne peut exister qu'une unique valeur de x telle que $f(x) = 0$.

5. Pour chacune des fonctions affines de la question 1 de cette partie, calculer la valeur de x annulant $f(x)$.

6. Dresser un tableau de signe pour chacune des fonctions de la question 1.

7. Proposer une méthode générale pour déterminer le signe d'une fonction affine.

Recherche 7 - 4

Écrire, sur le modèle de l'algorithme de l'exercice 7.2, un algorithme déterminant les variations d'une fonction affine.

Recherche 7 - 5 Temperatures

Two main temperature units are used in everyday life, the Celsius and Farenheit degrees. The formulas to switch from one to the other is as follows : if x is the temperature in Celsius, then the temperature in Farenheit is

$$f(x) = \frac{9}{5}x + \frac{288}{5}.$$

1. Turn into farenheit degrees the following temperatures in Celsius : 0, 5, 20, 35, 100. Give the results in a table of values.

2. What kind of function is f ?

3. Prove that as the temperature in Celsius increases, so does the temperature in Farenheit.

4. Find the Celsius temperature that gives a Farenheit temperature equal to 0.

5. Study the sign of the function f.

6. Is it often that we get, in England, a negative Farenheit temperature ?

Recherche 7 - 6 QCM

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Les questions sont indépendantes les unes des autres. Pour chacune des questions suivantes, choisir la ou les bonne(s) réponse(s).

QUESTIONS	RÉPONSES
1. Soit $f : x \mapsto 1 - 2x$, alors	**(a)** $f(-1) = -2$ **(b)** 0 a pour antécédent 1 **(c)** $f(2) = -3$
2. La représentation graphique de $f(x) = \frac{2}{3}x - 3$ passe par	**(a)** $A(-3;-5)$ et $B(3;-1)$ **(b)** $A(-3;-5)$ ou $B(3;\frac{2}{3})$ **(c)** $A(6;-1)$ et $B(3;-1)$
3. L'expression $-2x + 6$ est	**(a)** positive sur $[6;+\infty]$ **(b)** positive sur $[3;+\infty]$ **(c)** négative sur $[6;+\infty]$
4. La fonction $f(x) = 2x$ est	**(a)** croissante **(b)** linéaire **(c)** affine
5. La fonction $g(x) = -5 + x$ est	**(a)** croissante **(b)** décroissante **(c)** monotone

Recherche 7 - 7

On donne ci-dessous 5 fonctions affines :

$$f(x) = 4x - 2 \quad ; \quad g(x) = 5 \quad ; \quad h(x) = 2x \quad ; \quad i(x) = -2x + 2 \quad ; \quad j(x) = 4 - 2x$$

1. Dresser le tableau de variation de chacune de ces fonctions.
2. Dresser le tableau de signe de chacune de ces fonctions.
3. Dans un repère orthonormal d'unité 1 cm, tracer les représentations graphiques de ces fonctions.

Recherche 7 - 8

In this exercise we will extend the method of the sign table to products of linear expressions.

1. Give the signs of the expressions $3x - 15$ and $-5x - 7$ in a sign table.
2. Use the previous question to copy and fill the next table.

x	$-\infty$	$-\frac{7}{5}$	5	$+\infty$
sign of $3x - 15$				
sign of $-5x - 7$				

3. Add a row to the new table where you will show the sign of the product $(3x-15)(-5x-7)$ over each interval.
4. Use the last row of the table to solve the inequations $(3x - 15)(-5x - 7) > 0$ and $(3x - 15)(-5x - 7) \leq 0$.

Recherche 7 - 9

Dresser les tableaux de signes des expressions suivantes.

1. $(2x + 7)(-3x + 1)$;
2. $(-4x - 8)(-5x + 12)$;
3. $(\frac{1}{4}x + \frac{1}{3})(x + 2)$;
4. $x(-x + 5.2)$;
5. $5x^2(-2x + 8)$;
6. $-4x(7x + 8)$.

Recherche 7 - 10

Déterminer le signe des quotients suivants en fonction de la valeur de x et donner le résultat sous forme de tableau.

1. $\dfrac{2x + 7}{-3x + 1}$;
2. $\dfrac{-x + 5.2}{x}$;
3. $\dfrac{6 - 3x}{2x + 1}$;
4. $\dfrac{13 + 6x}{4 - x}$;
5. $\dfrac{2x}{3x + 5}$;
6. $\dfrac{1.3x + 9}{-5x}$.

Recherche 7 - 11

Résolvez les problèmes suivant :

1. Étudiez le signe de $(2x + 3)(2 - 3x)$
2. Résolvez dans $\mathbb{R}$ $(x^2 - 4)(x^2 + 9) \geqslant 0$
3. Déterminez les valeurs de x pour lesquelles l'expression $\sqrt{(2 - x)(x - 5)(x^2 + 1)}$ est définie ?
4. Quel est le signe de Zorro ?

Recherche 7 - 12

1. Développer, réduire et ordonner l'expression : $(x + 3)^2 - 16$.
2. Factoriser l'expression : $(x + 3)^2 - 16$.
3. À l'aide d'un tableau de signe, résoudre l'inéquation : $(x - 1)(x + 7) < 0$.

Recherche 7 - 13

Résolvez les inéquations proposées en n'oubliant pas de préciser d'abord l'ensemble de définition.

$\dfrac{2(x+5)-1}{x+3} > 0$ $\dfrac{3-x}{x+3} \leqslant 2$ $\dfrac{4+x}{x} \leqslant \dfrac{2x+1}{2x-1}$ $\dfrac{4x}{(x+2)^2} > \dfrac{4}{x+2}$

Recherche 7 - 14 Money

In this exercise, we look at the problem of currency exchange.

A- The official exchange rate

As of April 6, 2010, one euro was equivalent to 0.88 UK pounds.

1. Convert the following amounts into UK pounds : 5 euros, 20 euros and 75 euros.
2. Find out the formula of the function p that converts euros into UK pounds.
3. What are the variations of the function p ? Use this result to fill out the following sentence : The ... euros you convert, the ... pounds you get.

B- Two bank services

A bank is offering a currency exchange service. They charge a 5 euros commission for any operation, and offer a rate of 0.85 pounds for 1 euro.

1. In that bank, how many pounds would you get for 5 euros, 20 euros and 75 euros ?
2. Find the formula of the function b_1 giving the amount in UK pounds you would get for x euros in this bank.
3. What are the variations of the function b_1 ?
4. Solve the equation $b_1(x) = 0$ and study the sign of $b_1(x)$ over the interval $[0, 100]$.

Another bank is offering a rate of 0.75 pounds for 1 euro, with no commission.

5. In that bank, how many pounds would you get for 5 euros, 20 euros and 75 euros ?
6. Find the formula of the function b_2 giving the amount in UK pounds you would get for x euros in the second bank.
7. What are the variations of the function b_2 ?
8. Study the sign of $b_2(x)$ over the interval $[0, 100]$.

C- Comparing the two banks

A UK visitor has to decide what bank to choose for a currency exchange operation. To do so, let's define a function f by the formula $f(x) = b_2(x) - b_1(x)$.

1. Find the formula for f.
2. Explain how function f can be used to help the visitor decide what bank to go to.
3. What are the variations of the function f ?
4. Find the solution of the equation $f(x) = 0$.
5. Help the visitor decide what bank he should go to.

Recherche 7 - 15

A farmer has bought 48 yards of fence to build a rectangular enclosure for a diplodocus. Let x be the length of the smallest side of the enclosure and y the length of the longest side.

1. Prove that $y = 24 - x$.

2. Compute the area of the enclosure as a function of x.

The farmer wants the enclosure to have an area of at least 135 square yards. He wants to know what are the possible lengths for the sides to do so.

3. What inequation must we solve to answer to this problem ?

4. Check that this inequation is equivalent to $(x - 15)(x - 9) \leq 0$.

5. Solve this new inequation using a sign table.

6. Conclude.

Recherche 7 - 16

A company is building urinals in large quantities. Let x be the number of thousands of urinals built. Each urinal is sold at the price of £15 per unit. We call $S(x)$ the total of the sales, in thousand of pounds.

1. **i.** Compute $S(1)$, $S(2)$ and $S(3)$.

ii. Find the general formula for $S(x)$.

2. The cost of fabrication of x thousand of urinals has been proved to be close to $C(x) = 25x^2 - 85x + 75$.

i. Prove that the balance of the company is equal to $B(x) = -25x^2 + 100x - 75$.

ii. Prove that $B(x) = 25(1 - x)(x - 3)$.

iii. What equation must we solve to find out for how many urinals the company will have a positive balance ?

iv. Solve this equation using a sign table.

Recherche 7 - 17

Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$.

1. Réduisez $f(x)$ au même dénominateur.

2. Résolvez par le calcul l'équation $f(x) = 0$.

3. Résolvez par le calcul l'inéquation $f(x) < 0$.

4. Résolvez par le calcul l'inéquation $f(x) \geqslant 3$.

5. Résolvez par le calcul l'équation $f(x) = x + 5$.

6. Résolvez par le calcul l'inéquation $f(x) < x + 5$.

Exercices - Droites et fonctions affines

Recherche 7 - 18

Dans la liste suivante, reconnaître les fonctions affines et les fonctions linéaires. Vérifier la réponse en traçant sur la calculatrice la représentation graphique de chaque fonction.

1. $f_1(x) = 3x + 1$;
2. $f_2(x) = -x$;
3. $f_3(x) = 25$;
4. $f_4(x) = 2x^2 - 5$;
5. $f_5(x) = \frac{9x}{7}$;
6. $f_6(x) = -2x + \sqrt{2}$;
7. $f_7(x) = \frac{4x-6}{2}$;
8. $f_8(x) = \frac{2}{4x-6}$;
9. $f_9(x) = (2x-1)^2$;
10. $f_{10}(x) = 2x - 1^2$;
11. $f_{11}(x) = \sqrt{3x+2}$;
12. $f_{12}(x) = \sqrt{3}x + \sqrt{2}$.

Recherche 7 - 19

L'algorithme suivant concerne une fonction de la forme $f(x) = ax + b$. Compléter les pointillés.

[H] a, b nombre réel $a = 0$“La fonction est … “ $b = 0$“La fonction est …” “la fonction est …”

Recherche 7 - 20

On travaille dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. Déterminez les équations réduites des droites suivant :

1. (D_1) qui passe par $A(1;2)$ et qui a pour coefficient directeur -2 ;
2. (D_2) qui passe par $B(-1;2)$ et $C(4;-3)$;
3. (D_3) qui est parallèle à la droite d'équation $y = -3x + 2$ et qui passe par A ;
4. (D_4) qui est parallèle à l'axe des ordonnées et qui passe par $E(37;-193\sqrt{\pi})$.

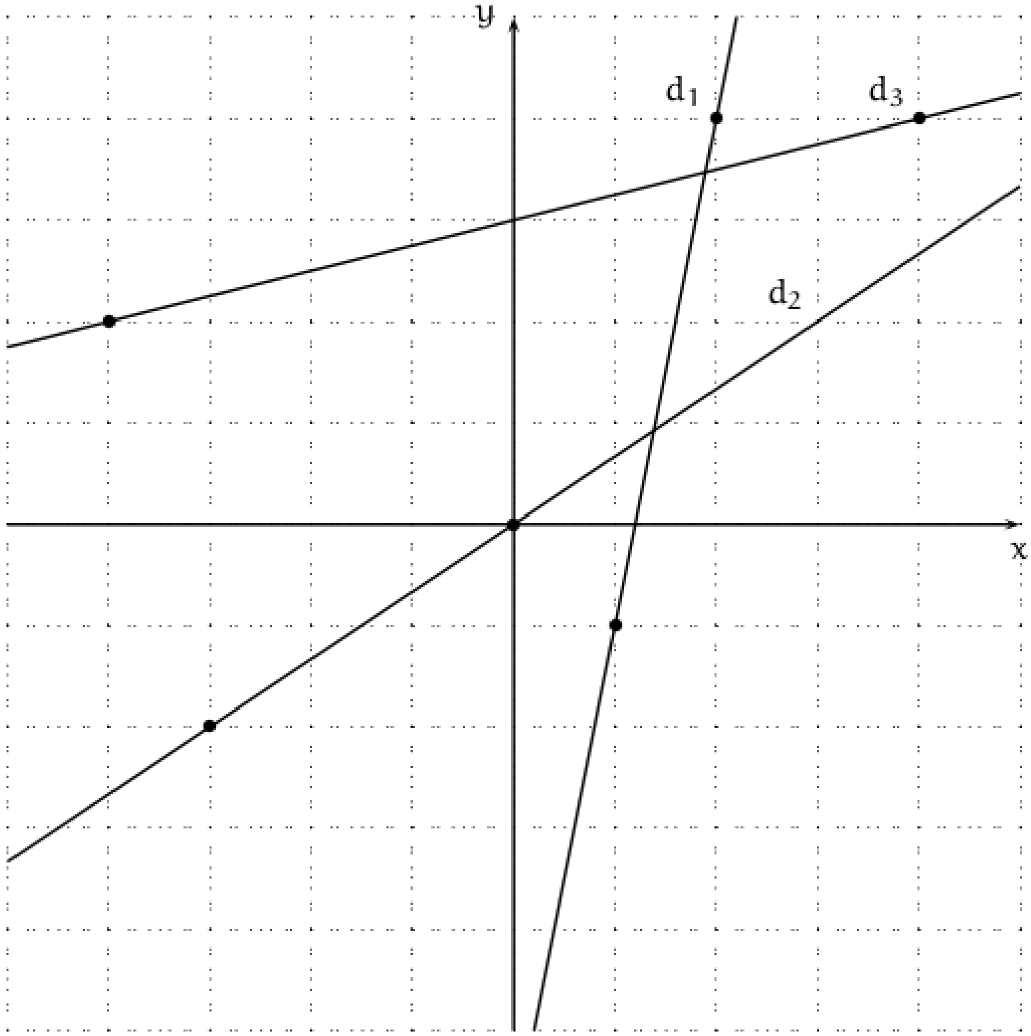
Recherche 7 - 21

Six équations de droites sont données ci-dessous.

- $d_1 : 3x - 3y + 3 = 0$;
- $d_2 : y - 2 = -6(x - \frac{1}{3})$;
- $d_3 : \frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$;
- $d_4 : -2x + 5y + 1 = 0$;
- $d_5 : y + 1 = 2(x + 5)$;
- $d_6 : \frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 1$.

Déterminez leurs coefficients directeurs respectifs et les coordonnées de leurs intersections avec l'axe des abscisses.

Recherche 7 - 22



Les droites d_1, d_2 et d_3 ci-contre représentent respectivement les fonctions affines f_1, f_2 et f_3.
Déterminer les expressions de chacune de ces fonctions en utilisant les coordonnées des points mis en évidence sur le graphique.

Recherche 7 - 23 **SAT**

If the line of slope $3/5$ contains the point $(3,1)$, then it must also contain which of the following points ?

1. $(-2,-2)$ **2.** $(-1,4)$ **3.** $(0,0)$ **4.** $(2,-1)$ **5.** $(3,4)$

Recherche 7 - 24 **SAT**

The line $y-1=5(x-1)$ contains the point $(0,n)$. What is the value of n ?

Recherche 7 - 25 **SAT**

What is the slope of the line whose equation is $2y-13=-6x-5$?

Recherche 7 - 26 **SAT**

What is the slope of the line that passes through the origin and the point $(-3,2)$?

Recherche 7 - 27 **AS-level**

Eight points have coordinates as follows. $A(3,5)$, $B(6,10)$, $C(8,3)$, $D(6,-2)$, $E(0,-5)$, $F(-4,-7)$, $G(-1,-4)$, $H(-4,2)$.

1. Find the gradients of the lines (AF), (HD), (AD), and (CH).
2. Show that the points D, E and F are on the same line.
3. Show that (AC) is parallel to (DH).

Recherche 7 - 28 **AS-level**

Find the gradients and y-intercepts for the lines with the followwing equations.

1. $y = x + 2$
2. $y = 2 - 3x$
3. $2x + y = 0$
4. $x + 2y + 7 = 0$
5. $\frac{1}{8}x + \frac{5}{4}y = 6$
6. $y = 7$
7. $x = 5$
8. $x = y$

Recherche 7 - 29 **AS-level**

State the gradient of the following lines :

1. $y = 7x + 6$
2. $x = 7y + 6$
3. A line which passes through the x-axis at $-2/3$ and through the y-axis at $4/9$.
4. A horizontal line which passes through the point $(\pi, -7, 12)$.

Recherche 7 - 30 **Edexcel**

The points A and B have coordinates $(2, 16)$ and $(12, -4)$.A straight line ℓ_1 passes through A and B.

1. Find an equation for ℓ_1 in the form $ax + by = c$.
2. The line ℓ_2 passes through the point C with coordinates $(-1, 1)$ and has gradient $1/3$. Find an equation for ℓ_2.

Recherche 7 - 31 **Révisions de Troisième**

Un industriel est spécialisé dans la fabrication de crème contre l'acné.
L'industriel reçoit des commandes de différentes régions de France.
Pour la livraison des produits, il s'adresse alors à deux sociétés de transport et compare leurs tarifs :

— tarif 1 : £3,50 par mile parcouru ;

— tarif 2 : £2 par mile parcouru avec en plus un forfait fixe de £150.

Soit y_1 le prix (en £) du transport avec le tarif 1 pour x miles parcourus.
Soit y_2 le prix (en £) du transport avec le tarif 2 pour x miles parcourus.

1. **i.** Reproduire et compléter le tableau suivant :

x (en miles)	50		150		300
y_1 (en £)		420			
y_2 (en £)				670	

   ii. Quel est le tarif le plus avantageux pour 50 miles parcourus ? Et pour 300 miles parcourus ?
2. Exprimer y_1 et y_2 en fonction de x.
3. Tracer la droite (d_1) représentant la fonction $f_1 : x \longrightarrow 3,5x$
   et la droite (d_2) représentant la fonction $f_2 : x \longrightarrow 2x + 150$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.
   On prendra sur l'axe des abscisses 1 cm pour représenter 25 miles, et sur l'axe des ordonnées 1 cm pour £50.
   Pour des raisons pratiques, prendre l'origine du repère en bas et à gauche de la feuille.
4. **i.** Déterminer graphiquement le nombre de miles à partir duquel il est plus avantageux pour l'industriel de choisir le tarif 2 (on laissera visible les pointillés nécessaires à la lecture graphique).

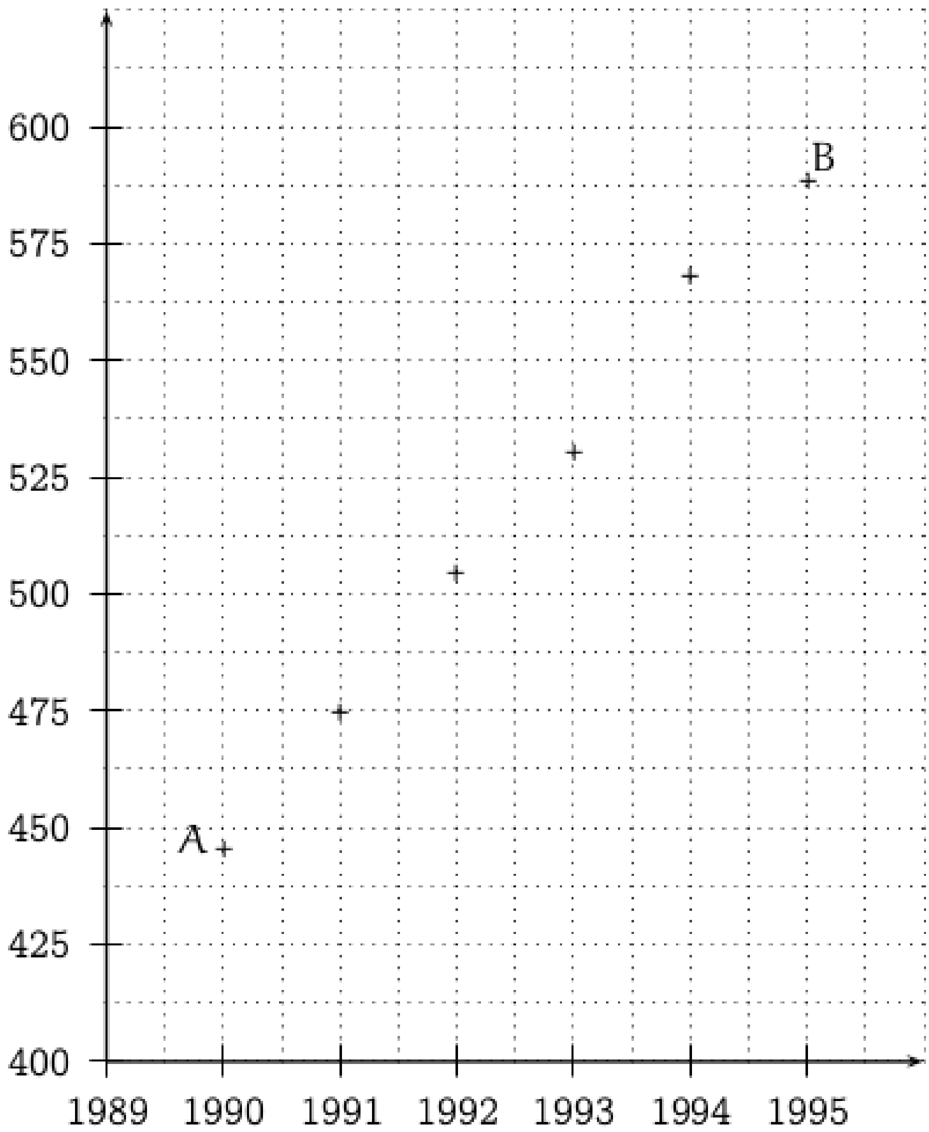
   ii. Retrouver ce dernier résultat par le calcul.

5. **i.** Résoudre l'équation $2x + 150 = 500$. À quoi correspond, pour ce problème, la solution de cette équation ?

ii. Sur le graphique, retrouver la solution de l'équation précédente : on laissera visibles les traits pointillés utiles.

Recherche 7 - 32

Le ministère de l'Éducation Syldave a publié en 1997 la progression des dépenses d'emprisonnement des élèves paresseux de 1990 à 1995. Ces données sont représentées graphiquement (tableau et graphique ci-dessous).



Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Dépense en milliards de Sprounz	445,5	474,5	504,8	530,2	568,2	588,5

On décide d'approcher la courbe représentant ces dépenses par la droite Δ passant par les points A et B.

1. Donner les coordonnées des points A et B en utilisant le tableau.

2. Calculer le coefficient directeur de la droite Δ.

3. On note f la fonction affine représentée par la droite Δ. Déterminer l'expression $f(x)$.

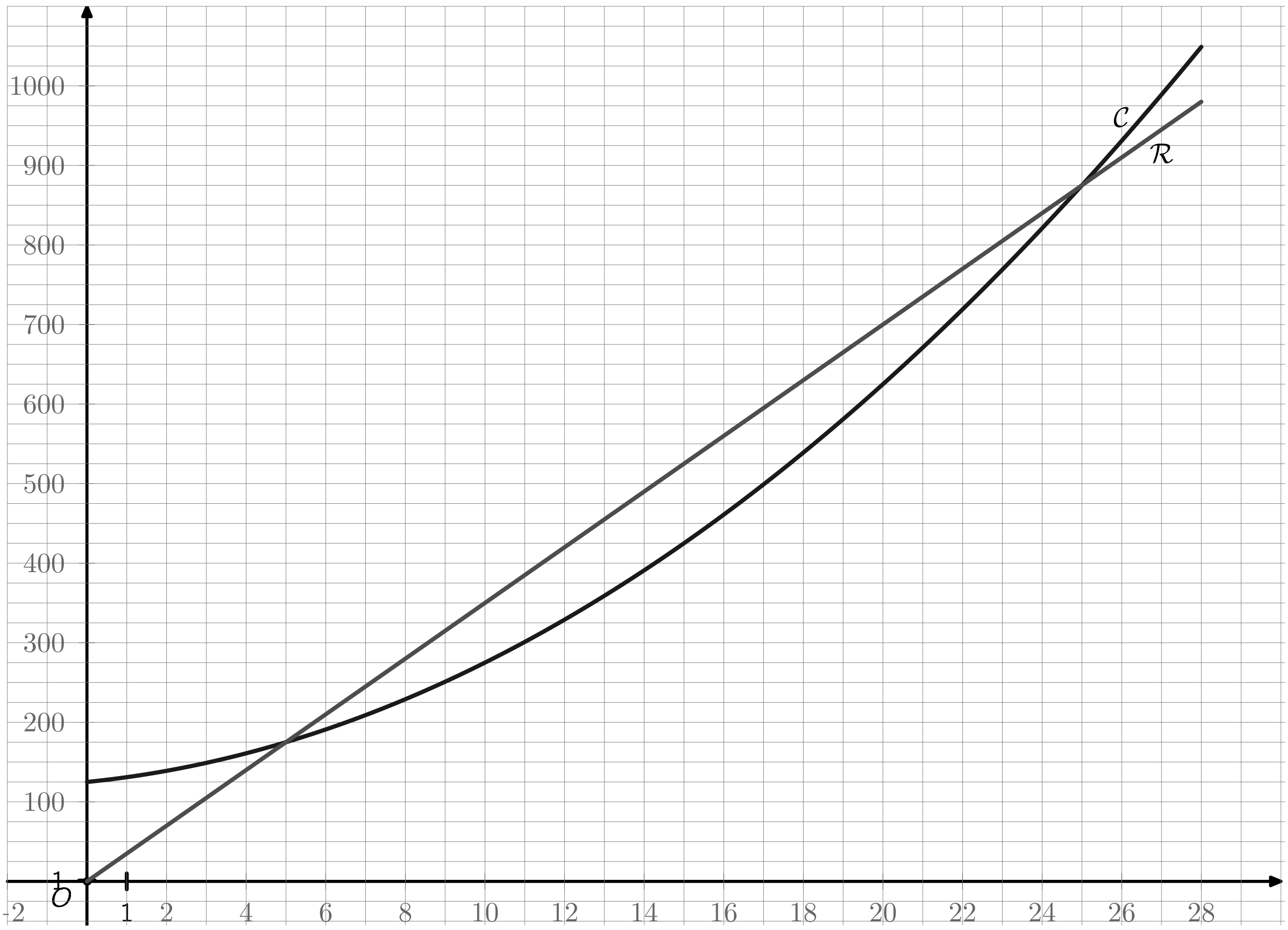
4. Calculer les coordonnées du point moyen G ayant pour coordonnées les moyennes des coordonnées des 6 points. Appartient-il à Δ ?

5. On suppose que cette évolution s'est maintenue les années suivantes. Évaluer la dépense globale en 2008.

Recherche 7 - 33

En janvier 2000, M. Chaprot a créé une entreprise qui fabrique des épilateurs de poils de nez à condensateurs mégathermicosensorielhyropropulsés fonctionnant à l'énergie éolienne. Comme il a du mal a trouver des employés assez qualifiés pour une telle besogne, il ne peut pas fabriquer plus de 35 épilateurs par mois.
On sait que l'entreprise parvient à vendre toute sa production en Syldavie, quelque soit le nombre d'épilateurs fabriqués, car M. Chaprot est le cousin par alliance du beau-frère de la femme de chambre de la nouvelle maîtresse italienne du Guide Suprême de ce bucolique pays et bénéficie d'un contrat exclusif de vente obligatoire aux ministres syldaves.

Lectures graphiques



Sur le graphique, on a représenté :

- le coût total de production (charges, salaires, matériel, pots de vin, etc.) en centaines d'euros, en fonction du nombre d'épilateurs produits (courbe $\mathcal{C}$) ;
- la recette totale, en centaines d'euros, engendrée par la vente de ces x épilateurs (droite $\mathcal{R}$ passant par O.)

Par exemple, 450 sur l'axe des ordonnées se lit 45 000 euros.

1. **i.** Est-ce que la recette est proportionnelle au nombre d'épilateurs vendus ?
ii. Quel est le montant des coûts fixes ?

2. **i.** Donnez le coût total de production de 10 épilateurs et faites apparaître le tracé sur le graphique.
ii. Déduisez-en le coût unitaire de production pour une production de 10 épilateurs.
iii. Quel est le coût unitaire si l'on fabrique 15 épilateurs.

3. **i.** Donnez, en justifiant votre réponse, le bénéfice réalisé par l'entreprise suite à la production et à la vente de 10 épilateurs.
ii. L'entreprise réalise-t-elle des bénéfices quelque soit le nombre d'épilateurs fabriqués ?

Étude de la fonction bénéfice

Les courbes $\mathcal{R}$ et $\mathcal{C}$ représentent en fait les fonctions r et c définies sur $[0\,;35]$ par :

$$r(x) = 35x \quad \text{et} \quad c(x) = x^2 + 5x + 125$$

1. Calculez $B(x)$ en fonction du nombre x d'épilateurs vendus, avec B la fonction bénéfice.

2. **i.** Montrez que $B(x) = -(x-5)(x-25)$.

ii. Dressez un tableau donnant le signe de B sur $[0 ; 35]$.

iii. Combien d'épilateurs M. Chaprot doit-il produire (ou plutôt ses ouvriers) pour gagner de l'argent ?

3. **i.** Montrez que $B(x) = -(x-15)^2 + 100$.

ii. Quelle doit être la production pour obtenir un bénéfice maximum ?

iii. Y a-t-il un lien entre le coût unitaire et le bénéfice ?

Bénéfice futur

1. L'entreprise a réalisé un bénéfice de 10 000 euros en 2000. À la fin de l'année, après impôts, investissements forcés dans l'économie syldave, financement du mariage secret du Guide Suprême syldave, fonds versés à la caisse noire du Parti du Rassemblement Syldave, paiement des vacances de la famille Chaprot aux Maldives, il reste à l'entreprise un bénéfice net représentant 8% du bénéfice brut initial. Calculez ce bénéfice net.
2. En payant moins les ouvriers et en faisant chanter les ministres pour qu'ils achètent plus cher les épilateurs, M. Chaprot augmente ses bénéfices nets de 11% par an. Quel bénéfice peut-il envisager en 2010 ?
3. À partir de quelle année pourra-t-il obtenir un bénéfice net supérieur à 30 000 euros ?

Recherche 7 - 34 Nucléaire

En 1990, une centrale atomique a été créée. Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution du pourcentage des salariés ayant quatre oreilles par rapport au total des salariés de la centrale.

Le tableau suivant donne, pour les années indiquées, le nombre x d'années écoulées depuis 1990 et le pourcentage y de salariés à quatre oreilles correspondant.

Année	1992	1994	1995	1998	1999	2001	2002	2003
x	2	4	5	8	9	11	12	13
y (en %)	8,9	10,2	10,5	12,2	12,3	13,2	13,8	14,9

1. Dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité graphique 1 cm, représenter le nuage des points M de coordonnées $(x ; y)$.

2. **i.** Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage, c'est à dire le point de coordonnées (moyenne des abscisses,moyenne des ordonnées)

ii. Placer le point G sur le graphique précédent.

3. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point G et de coefficient directeur 0,5.

i. Tracer la droite $\mathcal{D}$ sur le graphique précédent.

ii. Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$.

4. On réalise, â l'aide de la droite $\mathcal{D}$ un ajustement affine du nuage représenté à la question **1.**, c'est à dire qu'on suppose que l'évolution du pourcentage de salarié à quatre oreilles peut être modélisé par la fonction affine correspondant à la droite $\mathcal{D}$. À l'aide de cet ajustement, déterminer graphiquement :

i. le pourcentage de salariés à quatre oreilles dans l'entreprise en 2000 ;

ii. en quelle année le pourcentage des salariés à quatre oreilles dans l'entreprise atteindra 16 %.
Pour ces deux questions, les traits nécessaires à la lecture devront figurer sur le graphique.

5. Retrouver par le calcul les résultats de la question précédente à l'aide de l'équation de $\mathcal{D}$ obtenue à la question **3. b.**.

Recherche 7 - 35 **Ténias**

La croissance observée en centimètres suivant l'âge est indiquée dans le tableau ci-dessous :

âge du ténia en années	1	2	3	4	5
taille en centimètres	23	36	43	55	62

La longévité de l'espèce (âge maximal) est évaluée à neuf années.

Très nombreux à la naissance, les ténias se font plus rares à l'âge adulte, les spécimens très âgés devenant exceptionnels. Ainsi sur 1000 ténias qui viennent de naître, seuls 10 parviendront à l'âge de 8 ans.

Le graphique suivant représente le nuage de points correspondant aux données du tableau.

1. Un ajustement linéaire du nuage semble-t-il justifié ?

2. On désigne par G_1 le point moyen du trois premiers points du nuage et par G_2 celui des deux derniers

   i. Calculer les coordonnées de G_1 et de G_2 et tracer la droite (G_1G_2) sur le graphique.

   ii. Montrer que la droite (G_1G_2) admet pour équation réduite : $y = 9,8x + 14,4$.

   iii. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et montrer qu'il appartient bien à la droite (G_1G_2).

   Placer le point G sur le graphique.

3. On admet que cette droite constitue une bonne modélisation de la taille du ténia en fonction de son âge.

   i. Résoudre algébriquement l'inéquation $9,8x + 14,4 > 200$. Est-il vraisemblable qu'un ténia dont la taille dépasse 200 centimètres puisse être observé ?

   ii. Résoudre graphiquement l'équation $9,8x + 14,4 = 100$.

   En déduire l'âge d'un ténia mesurant 100 centimètres . (On donnera la valeur entière la plus proche et on laissera apparents les traits de construction).

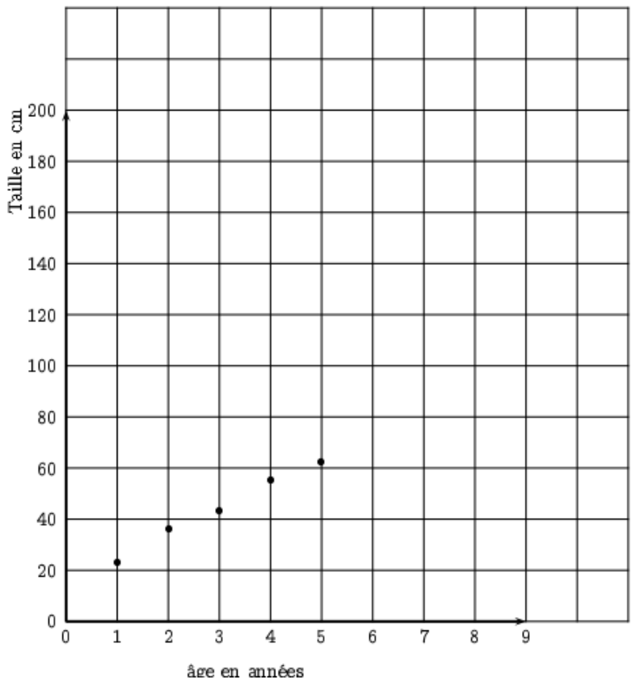


FIGURE 7.1 – Évolution de la taille d'un ténia en fonction de son âge

Recherche 7 - 36 **Élèves de Seconde 22**

On met en contact des élèves de seconde 22 avec un agent antiparesse. Dans le tableau ci-dessous, t_i désigne le temps (en minutes) d'exposition des élèves à l'agent antiparesse,
y_i désigne le nombre de survivants sur 10^6 élèves.

t_i	15	20	25	30	35	40	45	50
y_i	120	67	49	27	20	9	7	3
$z_i = \ln y_i$								

Vous trouverez une touche ln sur votre calculatrice.

1. Recopier le tableau en complétant la dernière ligne $z = \ln y_i$, où ln désigne la fonction logarithme népérien : vous vous contenterez d'utiliser la touche ln de votre calculatrice.
   Donner les résultats arrondis à 10^{-1} près.
2. Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées $(t_i\ ; z_i)$ dans un repère orthogonal (*unités graphiques 2 cm pour 10 minutes en abscisse et 2 cm pour une unité en ordonnée*).
3. **i.** Calculer les coordonnées du point moyen G_1 associé aux quatre premiers points du tableau, puis celles du point moyen G_2 associé aux quatre derniers points du tableau.
   ii. Tracer la droite (G_1G_2).
   iii. Une équation de la droite (G_1G_2) est de la forme $z = at + b$. Calculer les nombres réels a et b.

Recherche 7 - 37 **A-Level 2015 - AQA P1**

The line (AB) has equation $3x + 5y = 7$.

1. Find the gradient of (AB).
2. The line (AC) has equation $2x - 3y = 30$. Find the coordinates of A.

Recherche 7 - 38 **A-Level 2015 - AQA P1**

The point P has coordinates $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ and the point Q has coordinates $(\sqrt{5}, 4\sqrt{5})$. Show that the gradient of PQ can be expressed as $n + \sqrt{15}$, stating the value of the integer n.

Recherche 7 - 39 A-Level 2014 - AQA P1

The point A has coordinates $(-1, 2)$ and the point B has coordinates $(3, -5)$.

1. Find the gradient of (AB).
2. Hence find an equation f the line (AB), giving your answer in the form $px + qy = r$, where p, q and r are integers.

Recherche 7 - 40 L'impôt sur le revenu

Cette année,les choses se compliquent avec le prélèvement à la source.
Revenons à la situation précédente pour simplifier un peu...
Et simplifions cette situation simplifiée. Considérons le cas d'un célibataire. Il faut d'abord connaître son revenu imposable pour l'année en question. Il s'agit du revenu du contribuable auquel on retire certaines sommes, par exemple au titre des frais professionnels (10
Ensuite, viennent les fameuses tranches qui donnent des taux :

— Jusqu'à 5 852 € : 0
— de 5 852 à 11 673 € : 5,50
— de 11 673 à 25 926 € : 14,00
— de 25 926 à 69 505 € : 30,00
— au-delà de 69 505 € : 40,00

Mais cela ne signifie pas qu'on ne paye pas d'impôt si on gagne 5852 € et 5,50% de 5853 €, c'est-à-dire 322 €, si on gagne un euro de plus! Si c'était le cas, effectivement, le système serait injuste. Un euro de plus de revenu et 322 € de plus sur l'impôt! Cela signifie par contre la chose suivante :
Si le revenu est inférieur à 5 852 €, on ne paye pas d'impôt.
Si le revenu est compris entre 5 852 € et 11 673 €, on ne paye pas d'impôt sur les 5852 premiers € de son revenu, et on paye 5,50% de la partie qui excède 5852 €. Par exemple, si le revenu est 5 853 €, on payera 5,50% de 1 euro, c'est-à-dire 5 centimes (voir plus loin cependant; on ne peut pas être imposé pour quelques centimes). Il n'y a donc pas d'injustice....
Si le revenu est compris entre 11 673 € et 25 926 €, on ne paye rien sur la première tranche de 5 852 €, puis 5,50% sur la deuxième tranche, allant de 5 852 € à 11 673 € (soit 5,50% de (11 673-5852) ou 320 €), et enfin 14,00% sur la partie du revenu qui excède 11 673 €. Exemple : si le revenu est de 15 000 €, l'impôt sera de 0 + 320 + 14 % x (15 000 - 11 673) = 785 €.
Et de même avec les autres tranches.
Essayez de représenter cela sur un beau graphique.
Quels sont vos commentaires?
Essayez ensuite de créer **un deuxième graphique** : en horizontale, encore le revenu imposable. En verticale, le taux d'imposition global, c'est-à-dire le pourcentage qu'il faut appliquer au revenu pour avoir l'impôt. Si on appelle l'impôt I et le revenu R, il s'agit simplement de diviser I par R. Par exemple, si le revenu est de 50 000 €, l'impôt est de 9537 €, si bien que le taux global est de 9 537/50 000 = 0, 19, c'est-à-dire 19 %.
Commentaires?
Encore un autre graphique. Horizontalement, toujours le revenu. Verticalement, on indique « ce qui vous reste quand vous avez payé vos impôts », autrement dit la différence entre le revenu et l'impôt.
Comment interpréter cette dernière courbe?
Pour les courageux : étudiez les impôts 2019...