

Exercice 1

Résoudre sur \mathbb{R} les équations suivantes :

1) $\sin^2 x = \frac{3}{4}$;

2) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$;

3) $\sin(2x) = \cos(x)$.

Exercice 2

1) Simplifier au maximum les expressions suivantes :

a) $A(x) = \cos(x + \pi) \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin^2(-x)$;

b) $B(x) = \tan(x + \pi) - \tan x$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$;

c) $C(x) = \sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi - x) \cdot \sin(-x)$;

d) $D(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

2) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{3}{4} - \sin^2 x.$$

Généralisation :

$$\sin(a + b) \sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b.$$

Exercice 3

En utilisant les formules d'addition, calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

On pourra utiliser l'égalité : $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$.

Exercice 4

Démontrer que, pour tout réel x :

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x).$$

Exercice 5

Démontrer que, pour tout réel x différent de $k\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$:

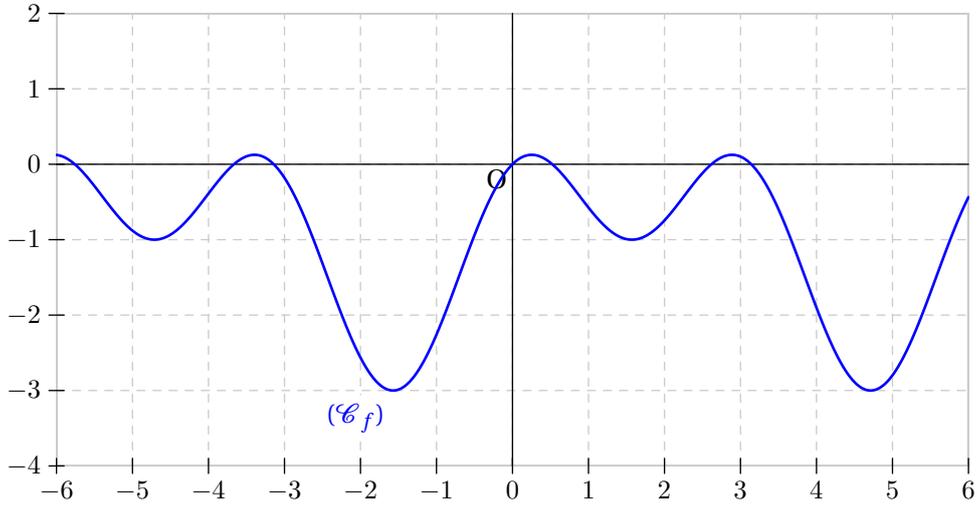
$$\frac{\sin(3x)}{\sin x} - \frac{\cos(3x)}{\cos x} = 2.$$

Exercice 6

Démontrer que la représentation graphique de la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \cos(2x) + \sin x - 1$$

est située entre les droites d'équation $y = -3$ et $y = 1$.

Illustration

Exercice 7Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$2 \sin^3 x - 17 \sin^2 x + 7 \sin x + 8 = 0.$$

Exercice 8

- 1) θ est un angle situé dans l'intervalle $] -\pi ; \pi[$ dont on sait que $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{1}{2}$.
Que vaut θ en radians ?
 - 2) θ est un angle situé dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi \right]$ tel que $\sin \theta = \frac{4}{5}$.
Calculer $\cos \theta$ et $\tan \theta$.
 - 3) θ est un angle situé dans l'intervalle $] -\pi ; 0]$ tel que $\cos \theta = \frac{2}{3}$.
Calculer $\sin \theta$ et $\tan \theta$.
 - 4) θ est un angle situé dans l'intervalle $] -\pi ; 0]$ tel que $\tan \theta = 2$.
Calculer $\cos \theta$ et $\sin \theta$.
-

Exercice 9

Résoudre dans $]-\pi ; \pi[$ les équations suivantes :

1) $2 \cos^3 x - 7 \cos^2 x + 2 \cos x + 3 = 0$;

2) $2 \sin^3 x + \cos^2 x - 5 \sin x - 3 = 0$.

Exercice 10

Dans cet exercice, on dispose de la donnée suivante : $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$.

On rappelle que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ pour tout $x \in D$ où $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \right\}$.

1) Démontrer que pour tout $x \in D$:

$$\tan(x + \pi) = \tan x.$$

En déduire la valeur exacte de $\tan\left(\frac{9\pi}{8}\right)$.

2) Démontrer que pour tout $x \in D$:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ puis de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

3) Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$.

Exercice 11

Résoudre dans $] -\pi ; \pi]$ l'équation : $\sin(2x) = \cos(x)$.

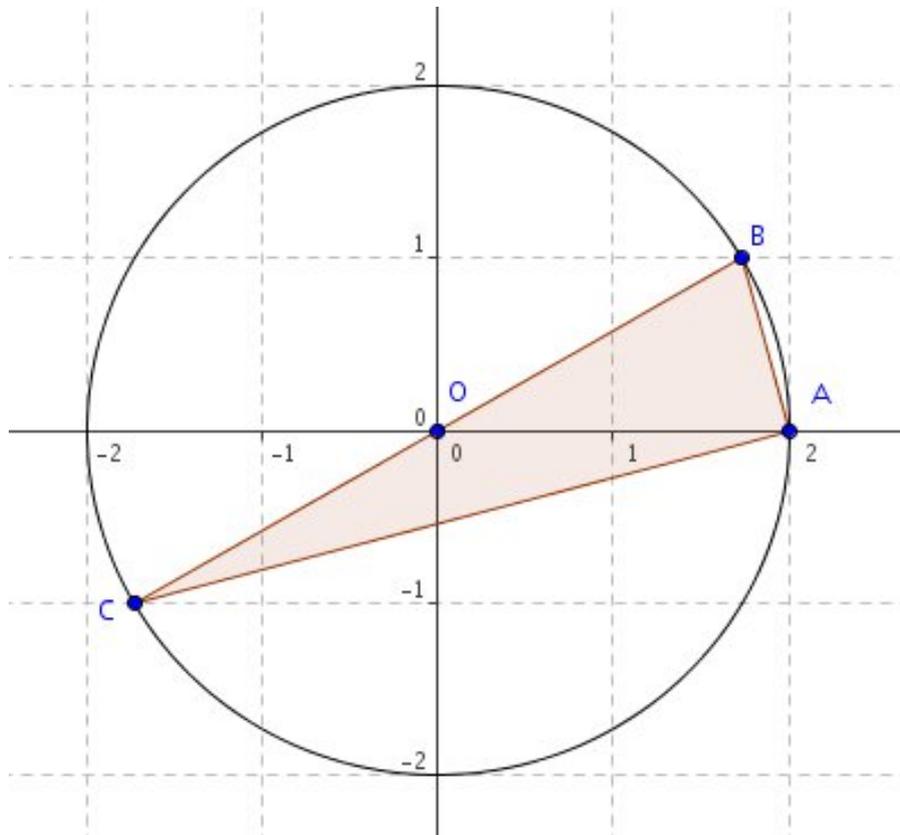
Exercice 12

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A et B dont les **coordonnées polaires** sont :

$$A(2 ; 0) \quad B\left(2 ; \frac{\pi}{6}\right)$$

On considère également le point C dont le **coordonnées cartésiennes** sont : $C(-\sqrt{3} ; -1)$.

- 1) Préciser, sans justification, les coordonnées cartésiennes de A .
- 2) Calculer les coordonnées cartésiennes de B .
- 3) Calculer les coordonnées polaires de C .
- 4) Justifier que les points A , B et C sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
- 5) Placer précisément les points A , B et C sur une figure.
- 6) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

Illustration

Exercice 13

Dans cet exercice, on dispose de la donnée suivante : $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$.

1) Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Démontrer que :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}.$$

2) En déduire que :

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 + \sqrt{3}.$$

Exercice 14

1) Résoudre dans $] -\pi ; \pi[$ l'équation :

$$\sin x = \sin(2x).$$

Représenter les éventuelles solutions sur le cercle trigonométrique.

2) Existe-t-il un angle aigu θ non nul ayant même sinus que 2θ ?

Exercice 15

Dans cet exercice, on donne :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ puis de $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.

Exercice 16

1) Démontrer que, pour tout $x \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$:

$$\tan x = \frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)}.$$

2) En déduire les valeurs exactes de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 17

ABC est un triangle non rectangle.

1) Démontrer que :

$$\tan(\widehat{A} + \widehat{B}) = -\tan(\widehat{C}).$$

2) A l'aide de la relation : $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ (que l'on pourra démontrer au passage), prouver que :

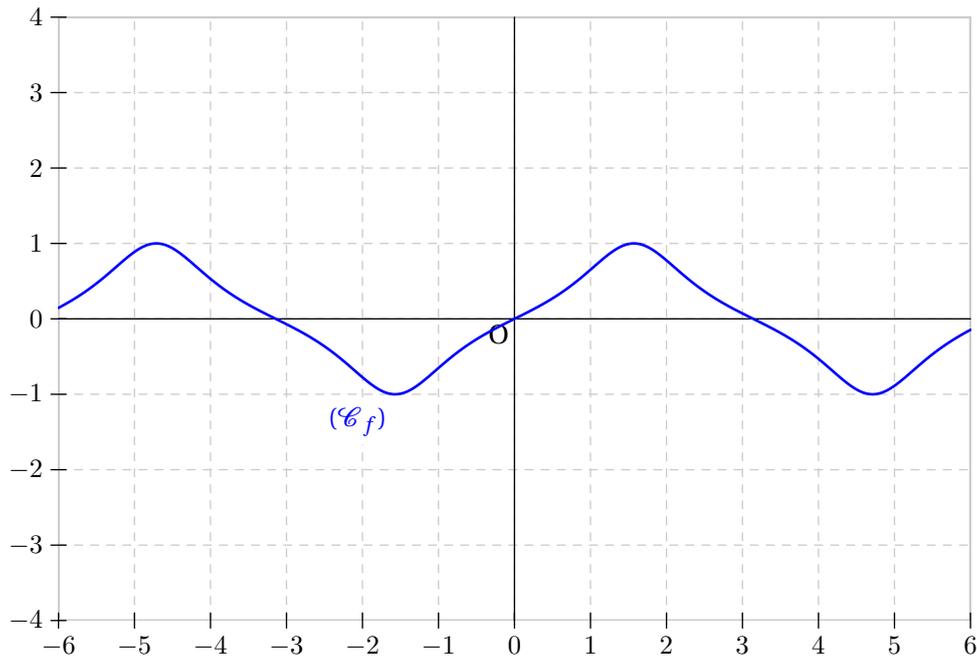
$$\tan(\widehat{A}) + \tan(\widehat{B}) + \tan(\widehat{C}) = \tan(\widehat{A}).\tan(\widehat{B}).\tan(\widehat{C}).$$

Exercice 18

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}.$$

- 1) Etudier la parité de f .
- 2) Démontrer que f est 2π -périodique.
- 3) Calculer la dérivée f' de f . En déduire le tableau de variations de f sur $[0 ; \pi]$.
- 4) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

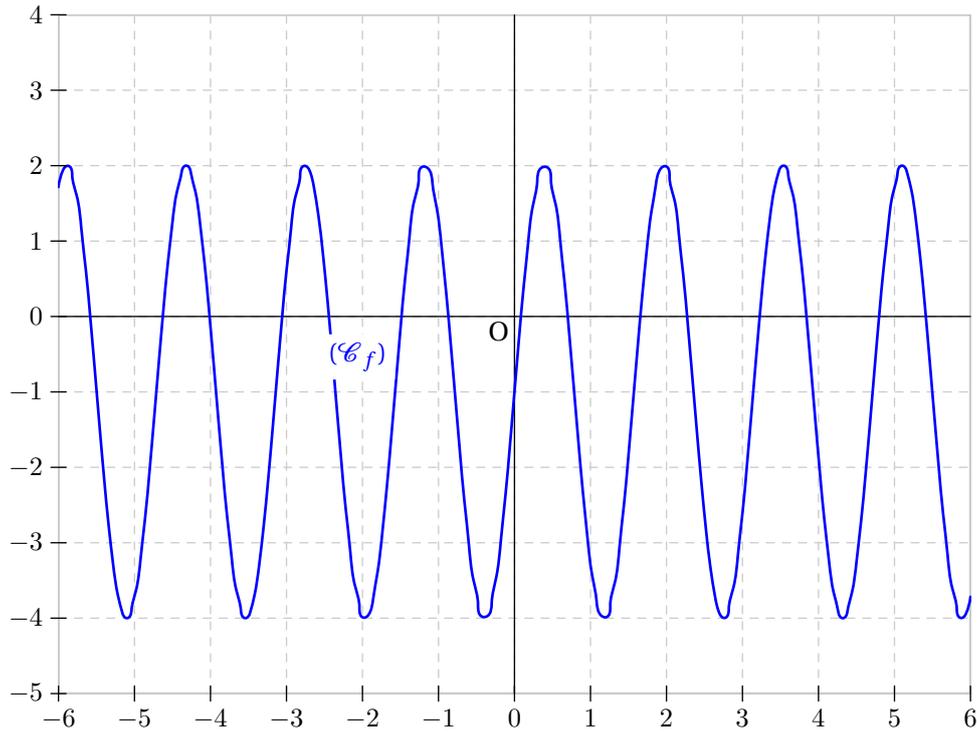
Illustration

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 3 \sin(4x) - 1.$$

- 1) Calculer la période de la fonction f .
- 2) Calculer sa dérivée f' .
- 3) Résoudre dans $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $f'(x) = 0$.
- 4) Donner le tableau de variation de f sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

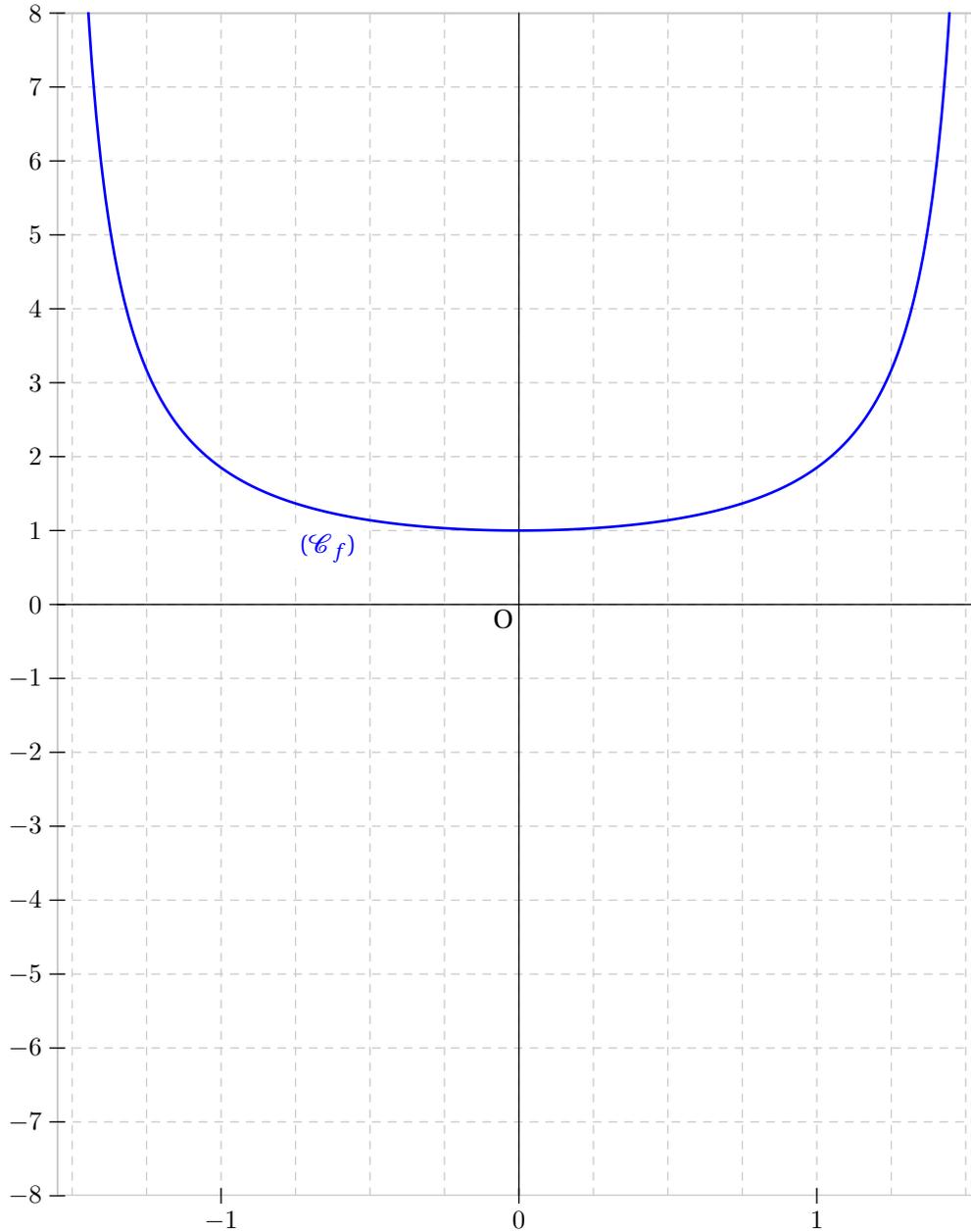
Illustration

Exercice 20

Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

- 1) Etudier la parité de f .
- 2) Calculer la dérivée f' de f . En déduire le tableau de variations de f sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
- 3) Résoudre dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ l'équation $f(x) = \sqrt{2}$.

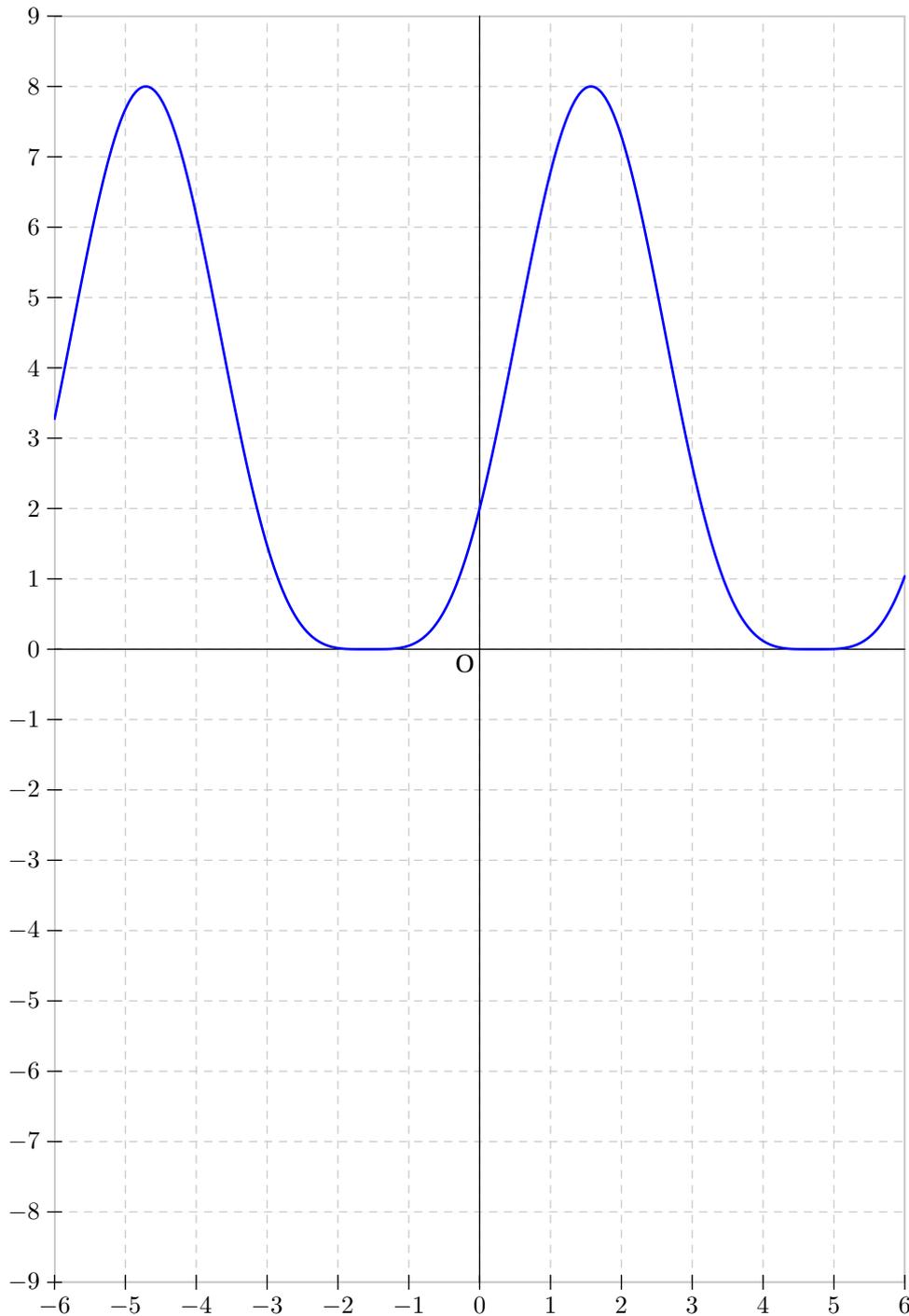
Illustration

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2 \sin^2 x + 4 \sin x + 2.$$

- 1) Démontrer que f est π -périodique.
- 2) Calculer la dérivée f' de f .
- 3) Dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; \pi]$.
- 4) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $f(x) = 0$.

Illustration

Exercice 22

Résoudre dans $] -\pi ; \pi]$ les équations suivantes.

1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 23

Pour chacune des inéquations suivantes, on demande :

- de placer sur le cercle trigonométrique les points correspondants à ces solutions,
- de donner la mesure principale associée à chacun de ces points,
- de donner toutes les solutions dans $] -\pi ; \pi]$.

1) $\sin x \leq -\frac{1}{2}$.

2) $\cos x < \frac{1}{2}$.

Exercice 24

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$.

On pourra poser $X = \cos x$.

Exercice 25

1) Exprimer $E(x)$ et $F(x)$ en fonction de $\cos x$ et/ou $\sin x$.

$$E(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(x - \pi) + \sin(\pi + x)$$

$$F(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) + \sin(x + 19\pi)$$

2) Simplifier l'expression G :

$$G = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{11\pi}{8}\right).$$

Exercice 26

Résoudre dans $] -\pi ; \pi]$ l'équation : $\sin(2x) = \sin(x)$.

Exercice 27

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

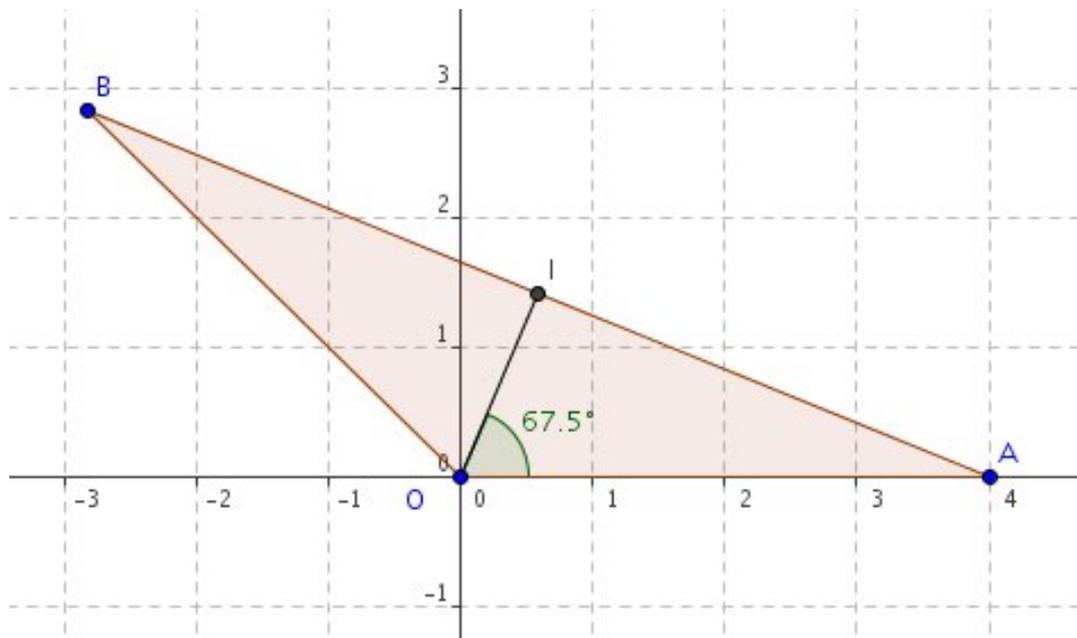
On considère les points : $A(4; 0)$ et $B(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.

- 1) Faire un graphique que l'on complètera au cours de l'exercice.
- 2) Déterminer les coordonnées polaires du point B . Que peut-on en déduire pour le triangle BOA ?
- 3) Calculer les coordonnées cartésiennes du point I milieu de $[AB]$.
- 4) Calculer la longueur OI et une mesure de l'angle (\vec{OA}, \vec{OI}) .
En déduire les coordonnées polaires de I .
- 5) Déduire des questions précédentes que :

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$$

On admettra que : $\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$ et que $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$

- 6) a) Calculer $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$.
- b) Déterminer les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{8}$.

Illustration

Exercice 28

Montrer que l'équation $\cos(2x) + \sin x = 1$ peut s'écrire : $\sin x(1 - 2 \sin x) = 0$.
En déduire ses solutions dans $] -\pi ; \pi]$.

Exercice 29

1) Résoudre dans $] -\pi ; \pi]$ les équations suivantes et placer les solutions sur un cercle trigonométrique :

a) $\sin x = 0$.

b) $\cos x = \frac{1}{2}$.

2) On considère l'équation $\sin(2x) = \sin x$.

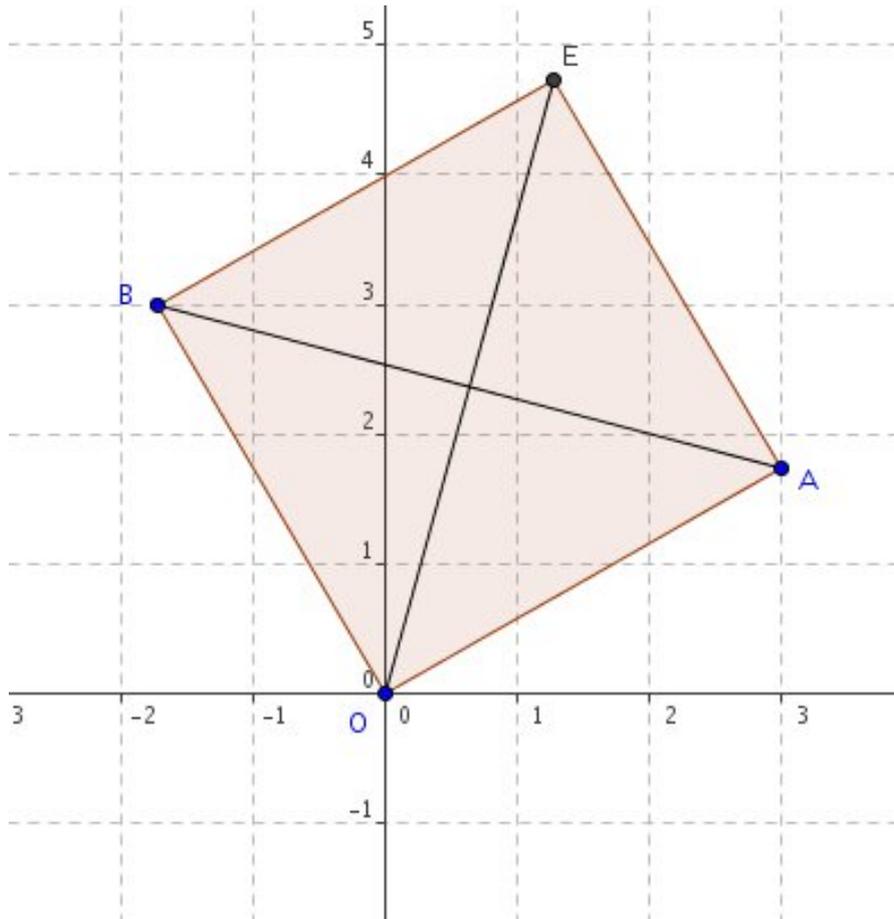
a) Montrer qu'elle peut s'écrire : $\sin x(2 \cos x - 1) = 0$.

b) Résoudre dans $] -\pi ; \pi]$ l'équation $\sin(2x) = \sin x$.

Exercice 30

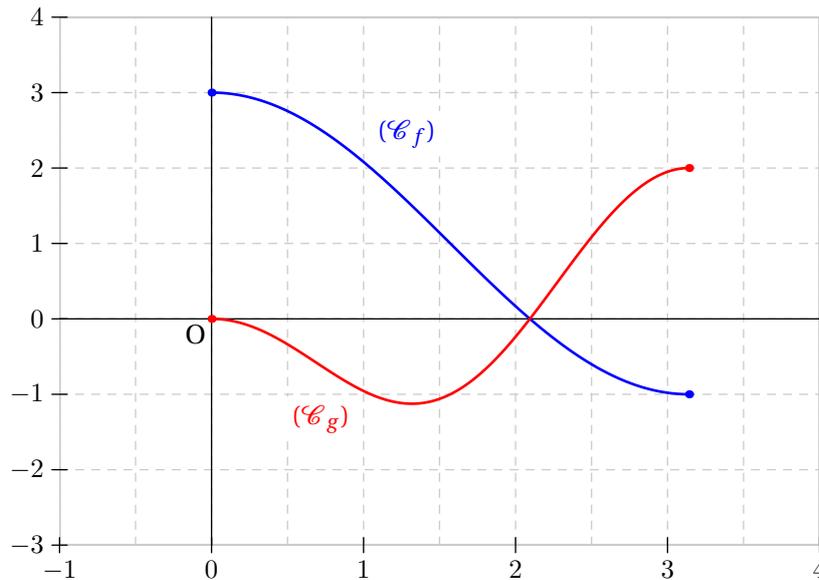
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On considère les points $A(3; \sqrt{3})$ et $B(-\sqrt{3}; 3)$.

- 1) Donner les coordonnées polaires de A et B .
- 2) Faire une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.
- 3) On considère le point E défini par $\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{OB}$.
Quelle est la nature du quadrilatère $OAEB$?

Illustration

Exercice 31

- 1) On considère la fonction g définie sur $[0 ; \pi]$ par $g(x) = 2 \cos x + 1$.
- Quel est le sens de variation de la fonction cosinus? En déduire celui de la fonction g .
 - Résoudre l'équation $g(x) = 0$.
 - Dresser le tableau de variations de g et en déduire le signe de $g(x)$.
- 2) On considère la fonction f définie sur $[0 ; \pi]$ par $f(x) = 2 \cos^2 x - \cos x - 1$.
- Factoriser le trinôme $2X^2 - X - 1$. En déduire une factorisation de $f(x)$.
 - Déterminer le signe de $f(x)$.

Illustration

Exercice 32

Un avion part de O et se dirige vers A .

Son cap est défini par l'angle $(\vec{i}, \vec{OA}) = \frac{2\pi}{3}$ où \vec{i} indique la direction de l'Est.

Après 6 km de vol, il se trouve en C mais un incident technique l'oblige à se détourner vers l'Est pour atterrir en B , tel que $CB = 12$ km.

Lorsqu'il repart vers A , son nouveau cap est : $(\vec{i}, \vec{BA}) = \frac{11\pi}{12}$. Le pilote souhaite déterminer la distance qui lui reste à parcourir et, s'il a le temps, en profitera pour déterminer les lignes trigonométriques de $\frac{11\pi}{12}$ et quelques angles associés ...

1) L'unité choisi étant le km, on introduit le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé direct.
Donner les coordonnées de C .

2) a) Etablir que les coordonnées cartésiennes de B sont $B(9 ; 3\sqrt{3})$.

b) En déduire que les coordonnées polaires de B sont $B \left[6\sqrt{3} ; \frac{\pi}{6} \right]$.

3) a) Justifier les égalités suivantes :

$$(\vec{CB}, \vec{CA}) = \frac{2\pi}{3} ; \quad (\vec{CO}, \vec{CB}) = \frac{\pi}{3} ; \quad (\vec{OB}, \vec{OA}) = \frac{\pi}{2}.$$

b) Prouver que le triangle OAB est rectangle isocèle.

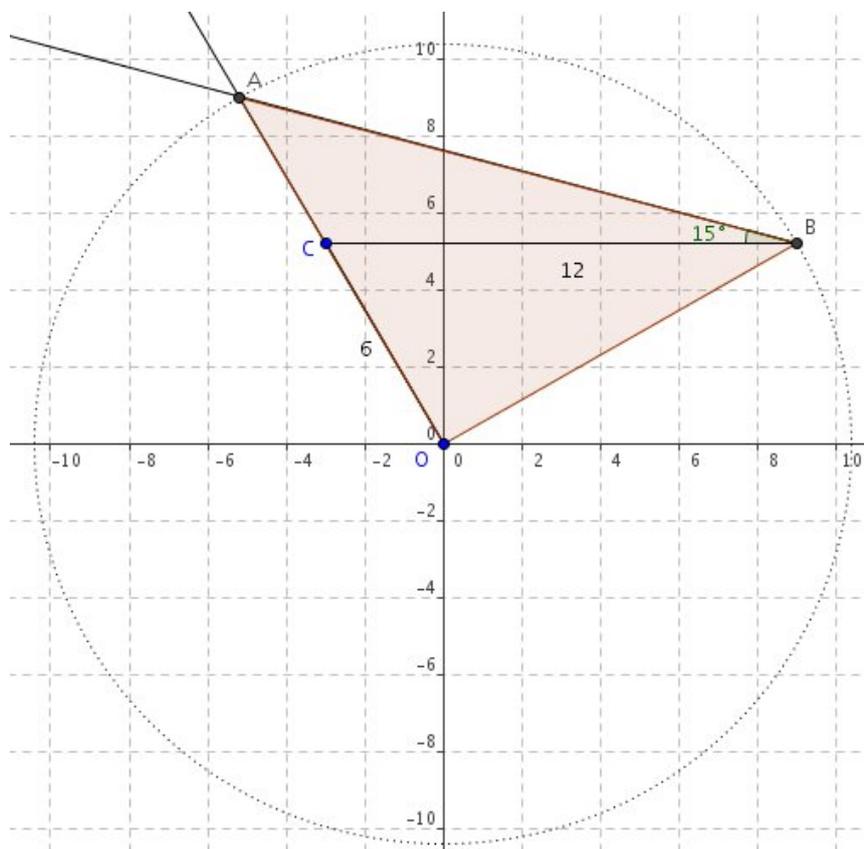
c) Calculer alors la valeur de la distance BA .

4) a) Données les coordonnées polaires puis cartésiennes du point A .

b) En écrivant le vecteur \vec{BA} de deux façons différentes, établir que :

$$\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

c) En déduire les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{7\pi}{12}$.

Illustration

Exercice 33

Exercice 34

Exercice 35

Exercice 36

Exercice 37

Exercice 38

Exercice 39

Exercice 40

Exercice 41

Exercice 42

Exercice 43

Exercice 44

Exercice 45

Exercice 46

Exercice 47

Exercice 48

Exercice 49

Exercice 50