Exercice 1

Parmi les 5 affirmations suivantes, dire si elles sont vraies ou fausses. Si elles sont vraies, les démontrer, si elles sont fausses, donner un contre-exemple.

1) Si une fonction polynôme est de degré 3, alors son carré est de degré 9.

2) Une fonction polynôme admet toujours une racine réelle.

3) La fonction polynôme P définie par $P(x) = x^5 + x^4 + 7x + 1$ n'a pas de racines positives.

4) Deux fonctions polynômes qui ont les mêmes racines sont égales.

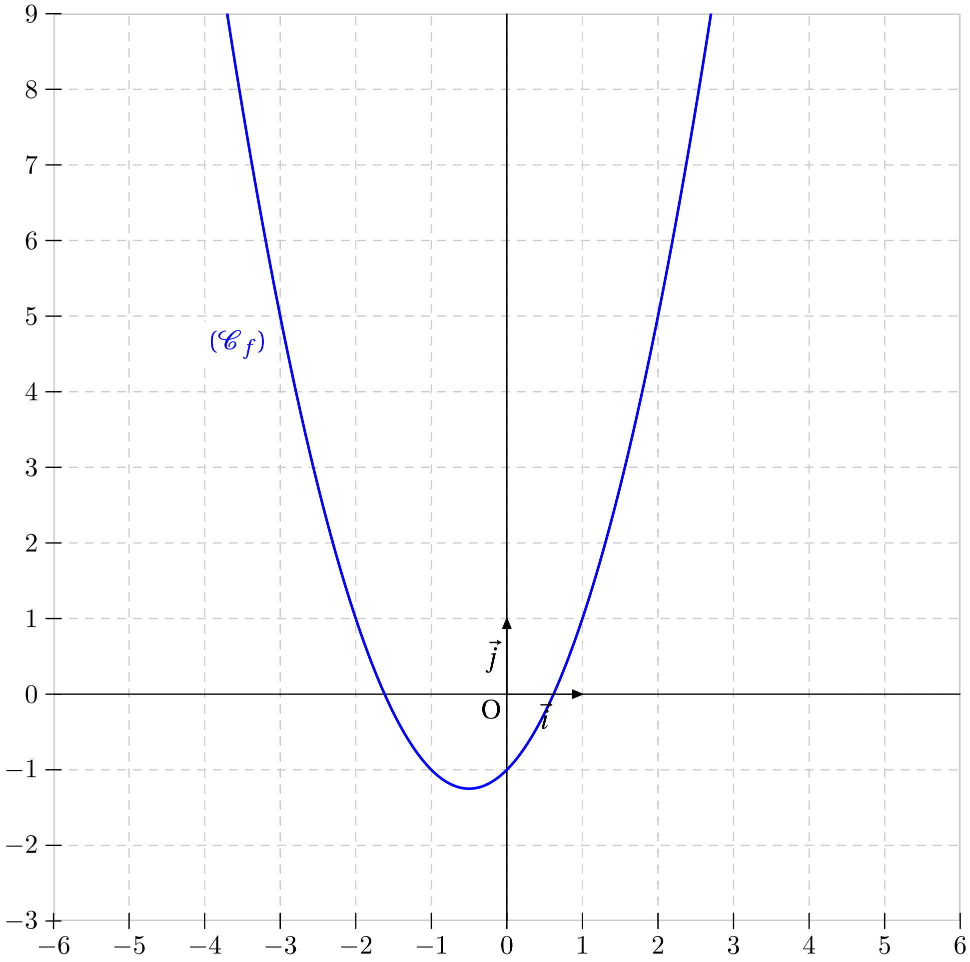
5) Si α est une racine de deux fonctions polynômes R et S, alors, $R(x) - S(x)$ est factorisable par $x - \alpha$.

Exercice 2

Démontrer que la fonction polynôme P définie par $P(x) = x^2 + x - 1$ possède une racine réelle α dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

Il n'est pas demandé de la calculer.

Illustration

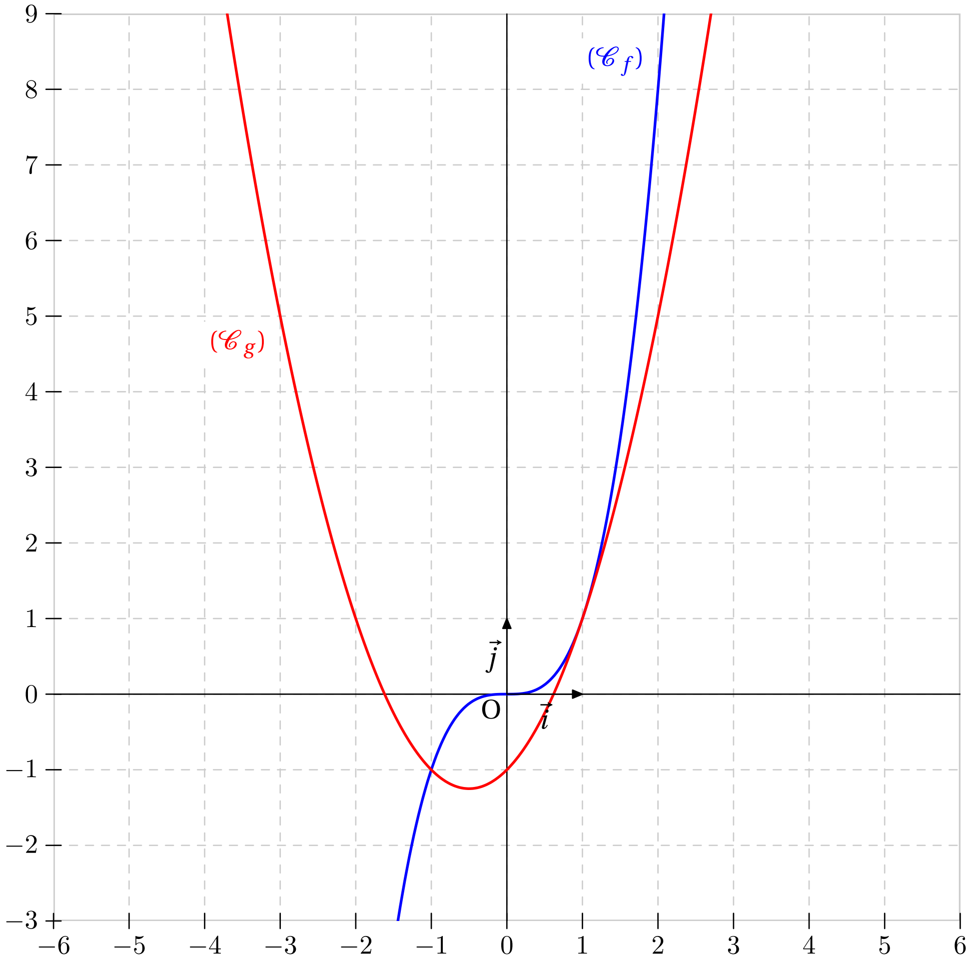


Exercice 3

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et $g(x) = x^2 + x - 1$.
On note $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ leurs représentations graphiques respectives.

Calculer les coordonnées des points d'intersections de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

Illustration



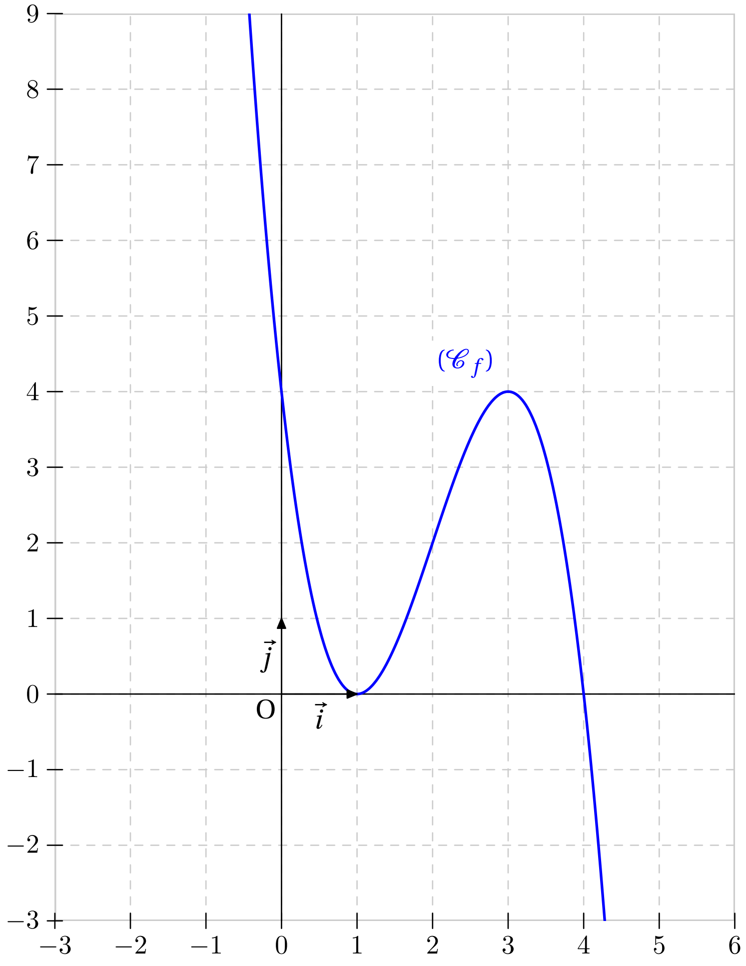
Exercice 4

On considère la fonction P définie par $P(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + k$ où k est un nombre réel.

1) Déterminer la valeur du réel k pour que 4 soit une racine de P.

2) Pour la valeur de k donnée à la question précédente, résoudre l'inéquation $P(x) < 0$.

Illustration

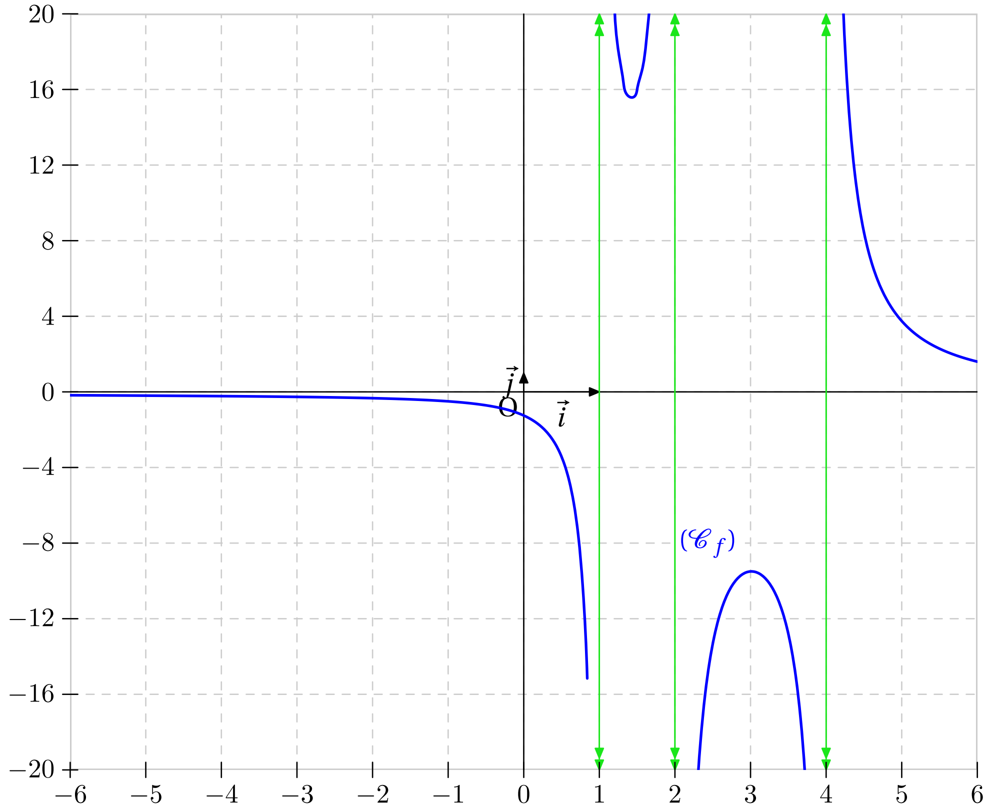


Exercice 5

Résoudre l'inéquation $\dfrac{-2x^2+3x-10}{-x^3+7x^2-14x+8} \geqslant 0$.

On pourra, s'il y a lieu, factoriser le numérateur et le dénominateur puis faire un tableau de signes.

Illustration



Exercice 6

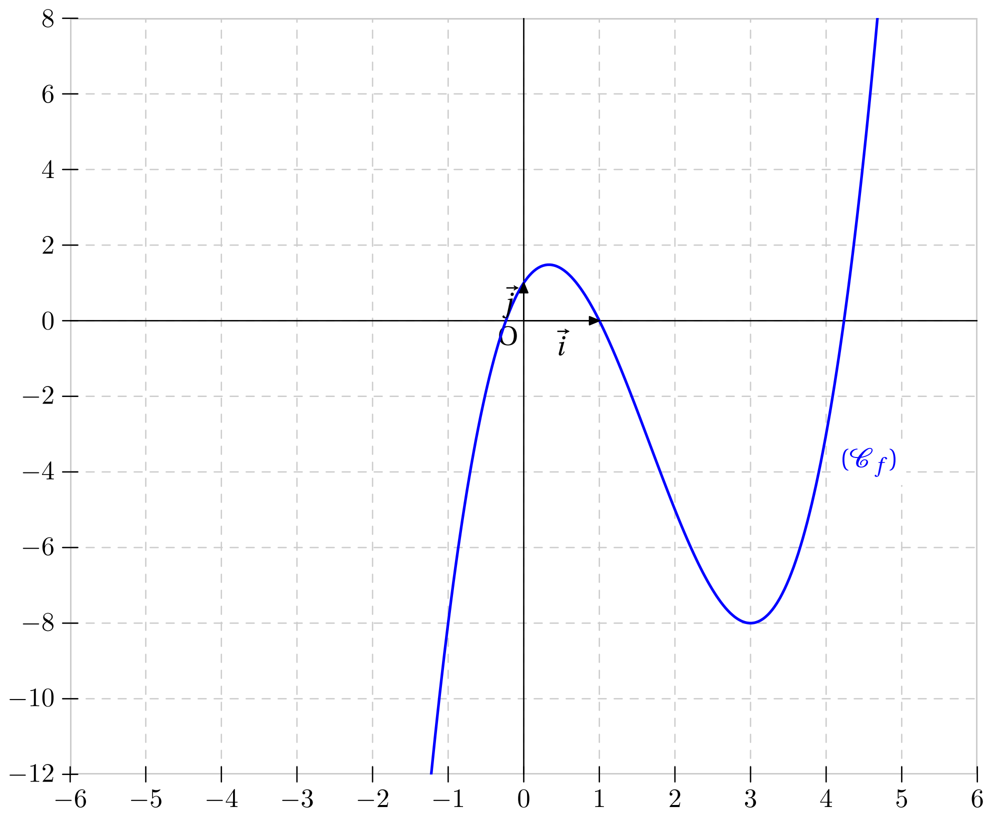
On considère la fonction polynôme P définie par : $P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$.
On note α, β et γ ses racines (elles existent !).

1) Ecrire en fonction de α, β et γ la forme (totalement) factorisée de $P(x)$.

2) Montrer que : $\alpha + \beta + \gamma = 5$, $\quad \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = 3 \quad$ et $\quad \alpha\beta\gamma = -1$.

3) Sachant que $\alpha = 2 - \sqrt{5}$ et $\beta = 1$, calculer (simplement) la troisième racine γ.

Illustration



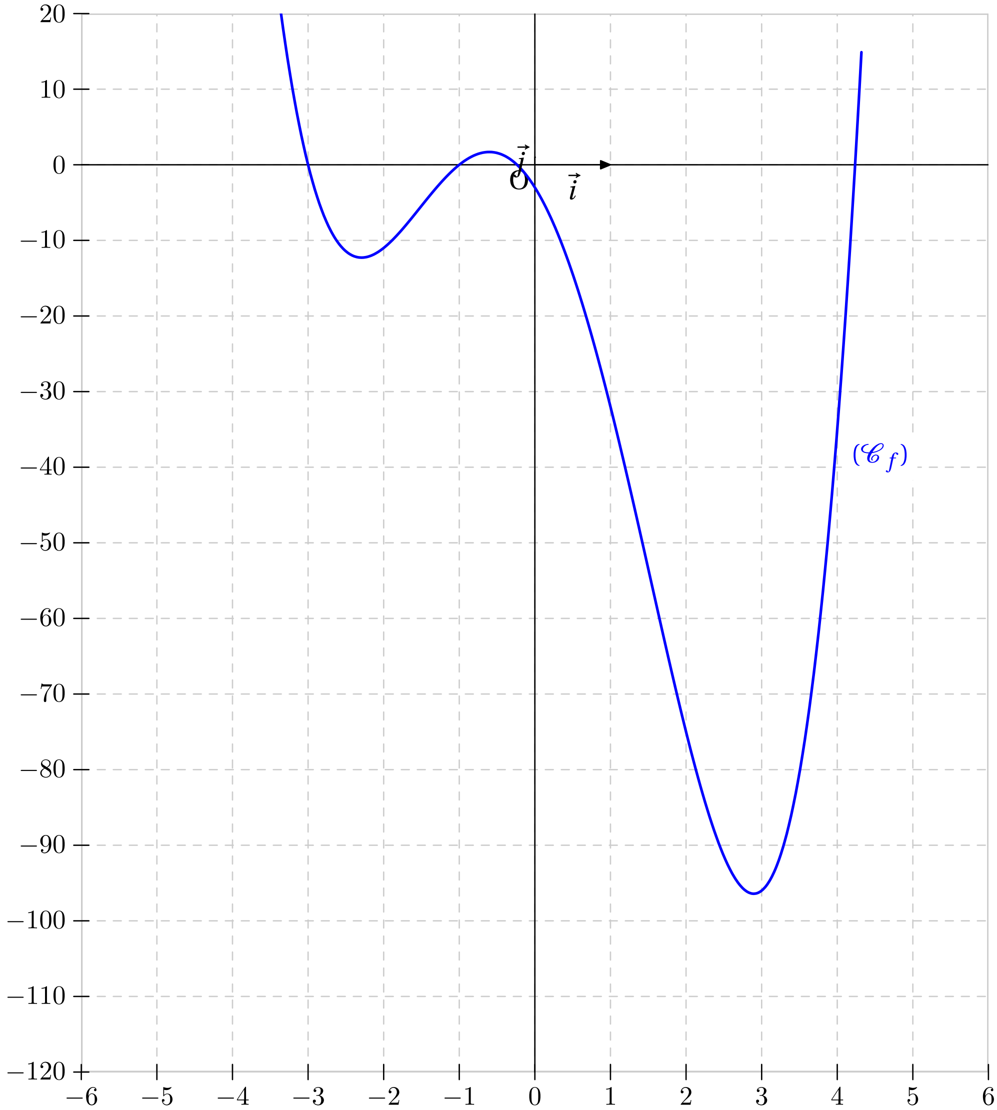
Exercice 7

On considère la fonction P définie par $P(x) = \left(x^2+1\right)^2 - (4x+2)^2$.

1) Montrer que P est une fonction polynôme dont on précisera le degré.

2) Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Illustration



Exercice 8

Le but de cet exercice est de montrer qu'un entier N est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

A l'entier N qui s'écrit $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ dans le système décimal, on associe le polynôme

$$P(x) = a_n x^2 + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Ainsi, on a : $N = P(10)$.

Un exemple.
Au nombre $N = 9873$, on associe la fonction polynôme $P(x) = 9x^3 + 8x^2 + 7x + 3$. On a bien : $N = P(10)$.

1) Soit S la somme des chiffres de N. Montrer que $S = P(1)$.

2) On pose $P'(x) = P(x) - S$. Montrer que 1 est racine de $P'(x)$.

3) En déduire que $P(x) = (x-1)Q(x) + S$ où Q est un polynôme de degré $n-1$.

4) Montrer que $N = 9Q(10) + S$. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

Exercice 9

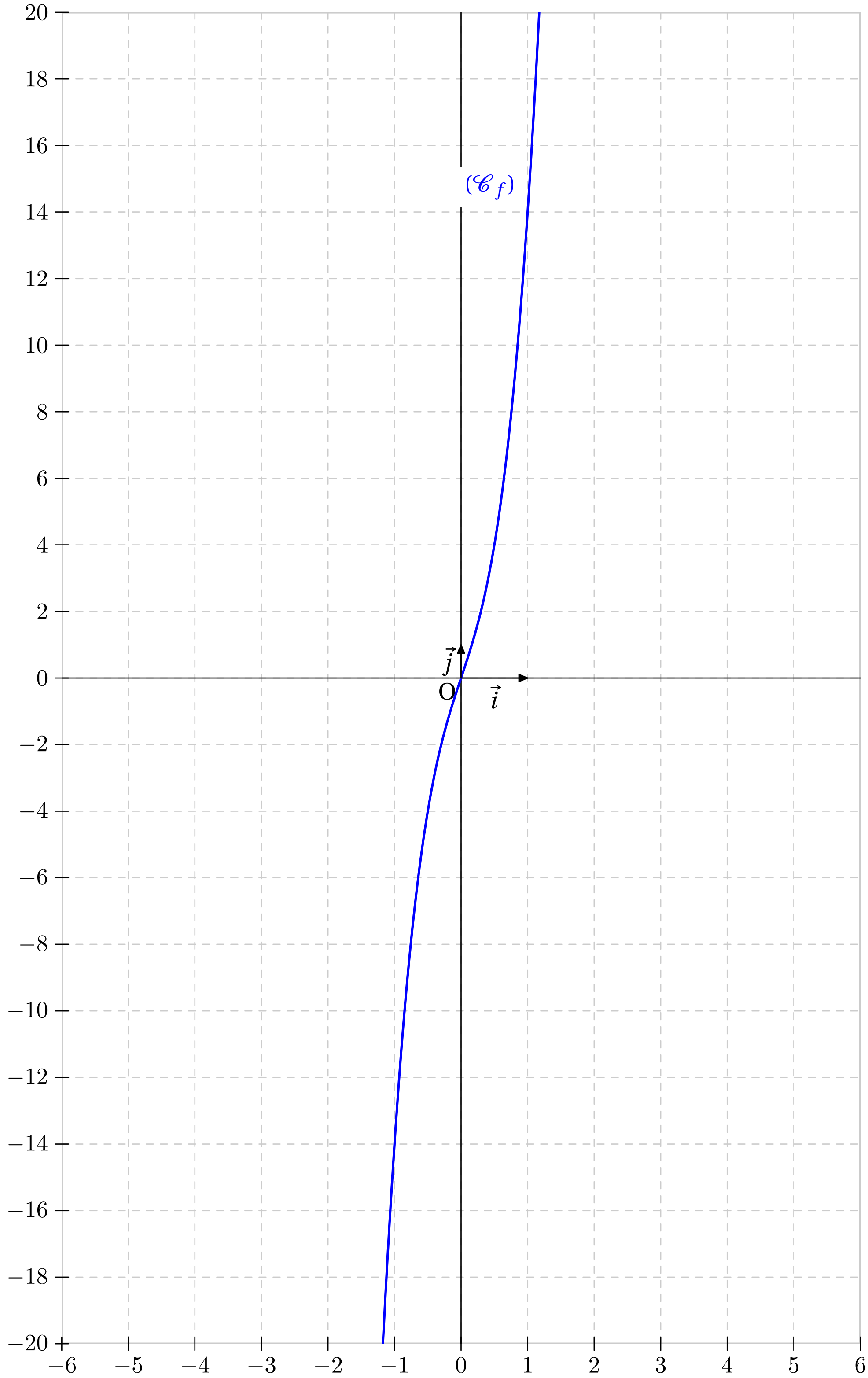
On considère l'expression : $f(x) = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^3 + \left(x - \sqrt{1+x^2}\right)^3$.

1) Démontrer que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et que $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

2) Démontrer que f est une fonction polynôme dont on précisera le degré.

3) Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

Illustration



Exercice 10

On considère la fonction polynôme P définie par $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6$.

1) Quel est le degré de P ?

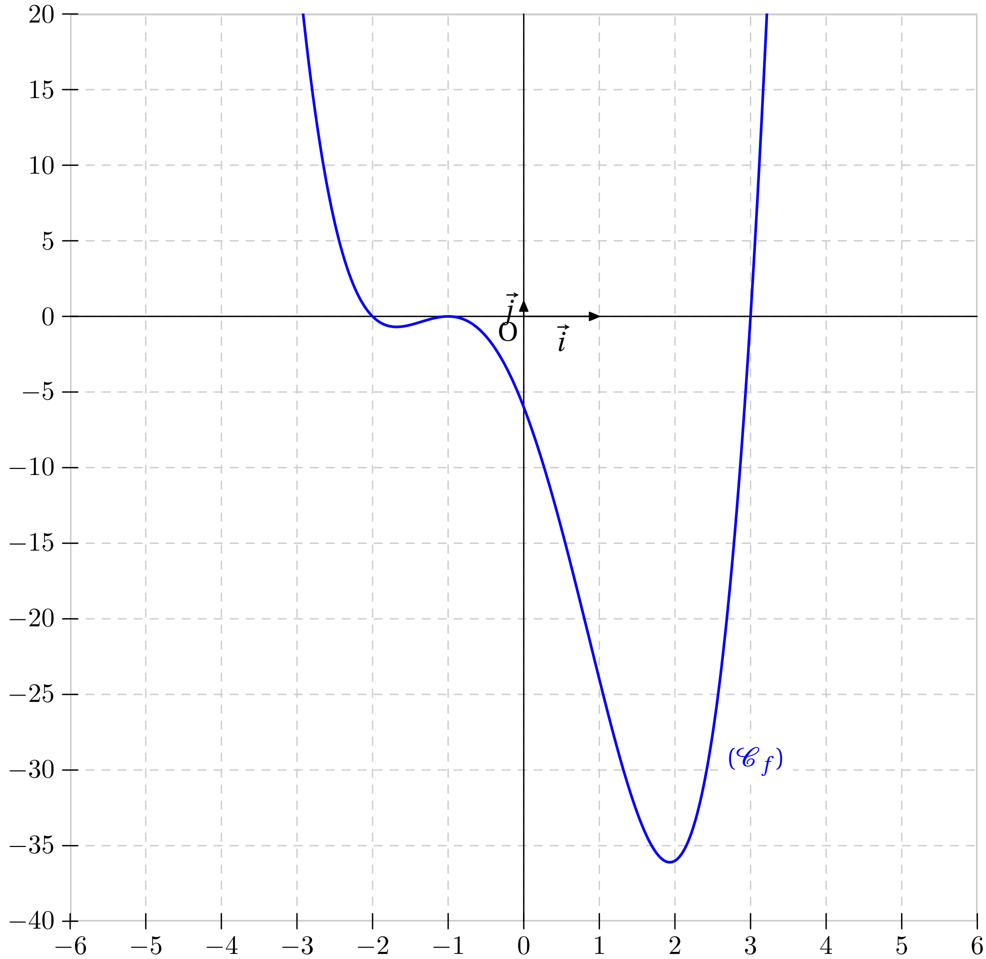
2) Montrer que $x = -1$ est une racine de P.

3) Déterminer une fonction polynôme Q du troisième degré telle que $P(x) = (x+1)\,Q(x)$.

4) Déterminer les racines de Q. On pourra s'inspirer des questions précédentes.

5) Résoudre l'inéquation $P(x) \geqslant 0$.

Illustration



Exercice 11

Résoudre $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ et $x^4 - x^2 - 12 = 0$.

Exercice 12

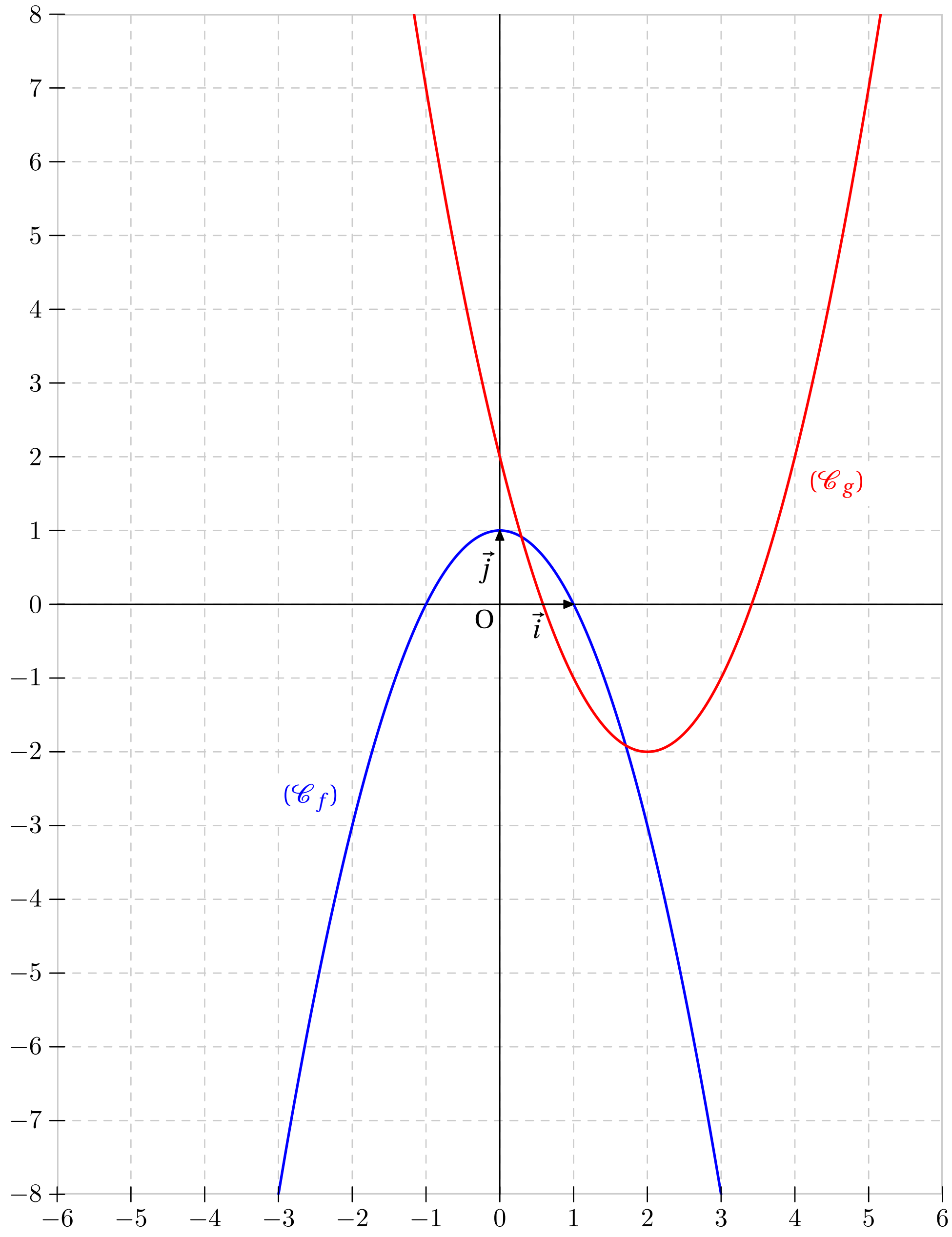
Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = 1 - x^2$ et $g(x) = x^2 - 4x + 2$ pour tout x réel.
On note $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ leurs courbes représentatives respectives dans un repère $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$.

1) Dresser les tableaux de variations de f et g.

2) Résoudre l'inéquation $g(x) \leqslant 0$ et interpréter graphiquement.

3) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ en précisant les coordonnées des points d'intersection éventuels.

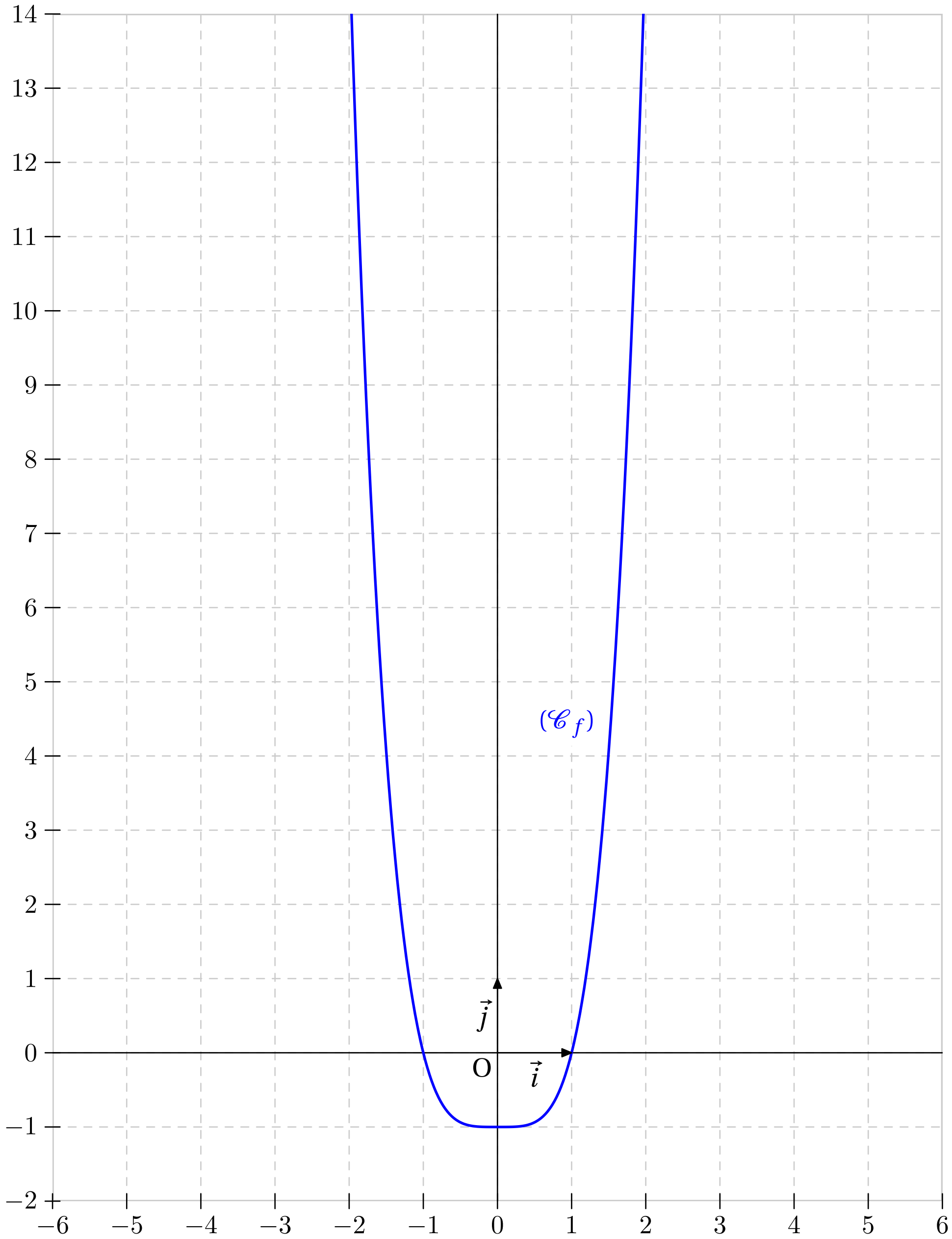
Illustration



Exercice 13

Factoriser sur $\mathbb{R}$: $P(x) = x^4 - 1$.

Illustration



Exercice 14

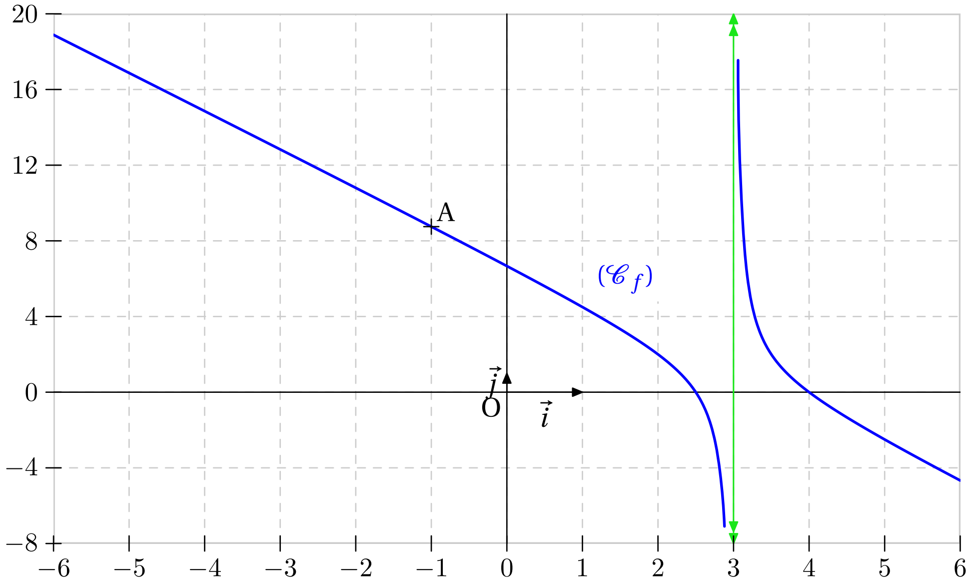
On donne la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \dfrac{-2x^3 + 11x^2 - 7x - 20}{x^2 - 2x - 3}$.

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?

2) Factoriser le numérateur et le dénominateur de f, puis simplifier l'expression de $f(x)$.

3) Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

Illustration



Exercice 15

Résoudre les équations :

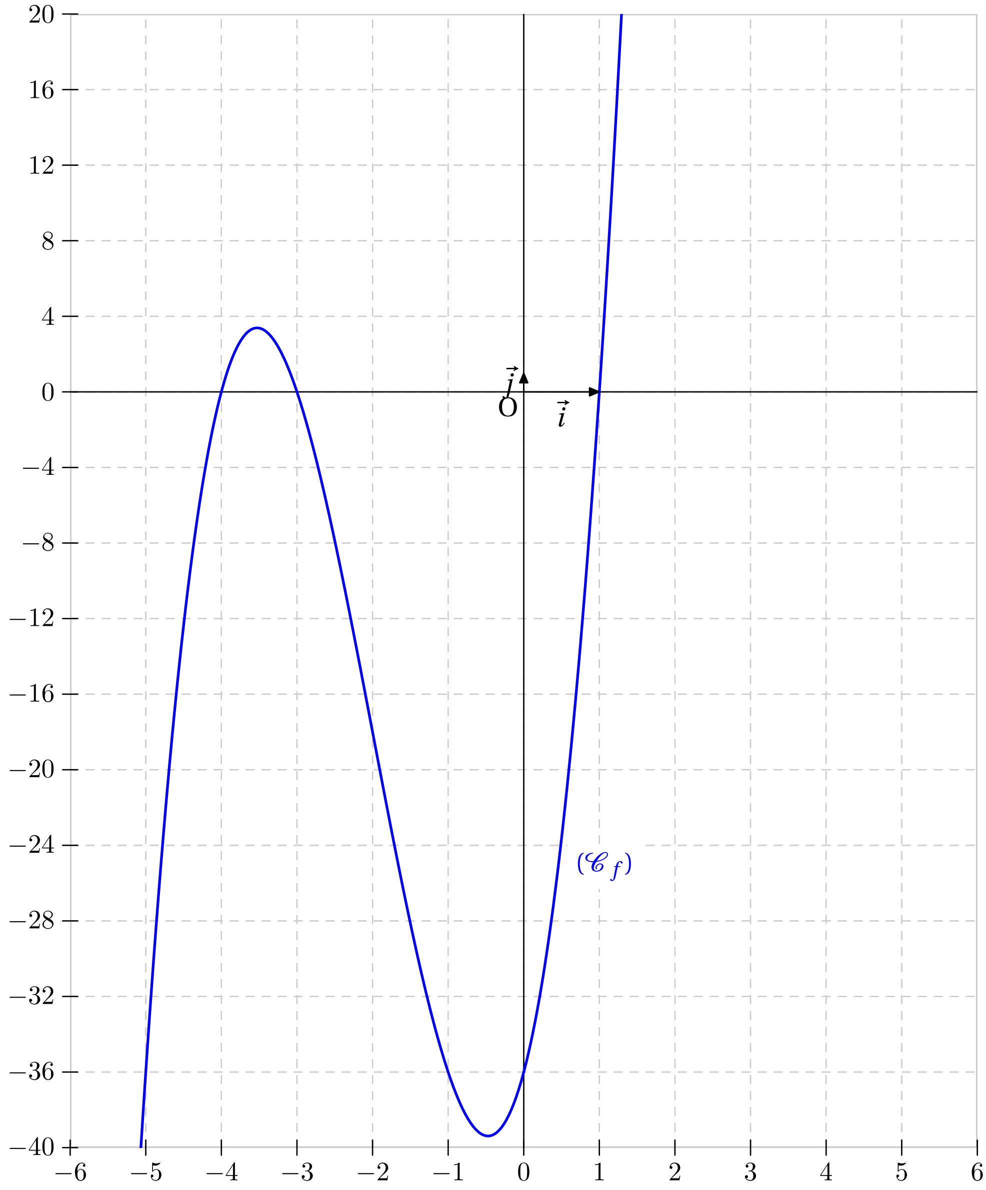
$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ On pourra remarquer que $x^3 + x^2 = x^2(x + 1)$.

$3x^3 + x^2 + 3x + 1 = 0$ On pourra remarquer que $3x^3 + x^2 = x^2(3x + 1)$.

Exercice 16

Déterminer une fonction polynôme P de degré 3 admettant 1, -3 et -4 pour racines et telle que $P(2) = 90$.

Illustration



Exercice 17

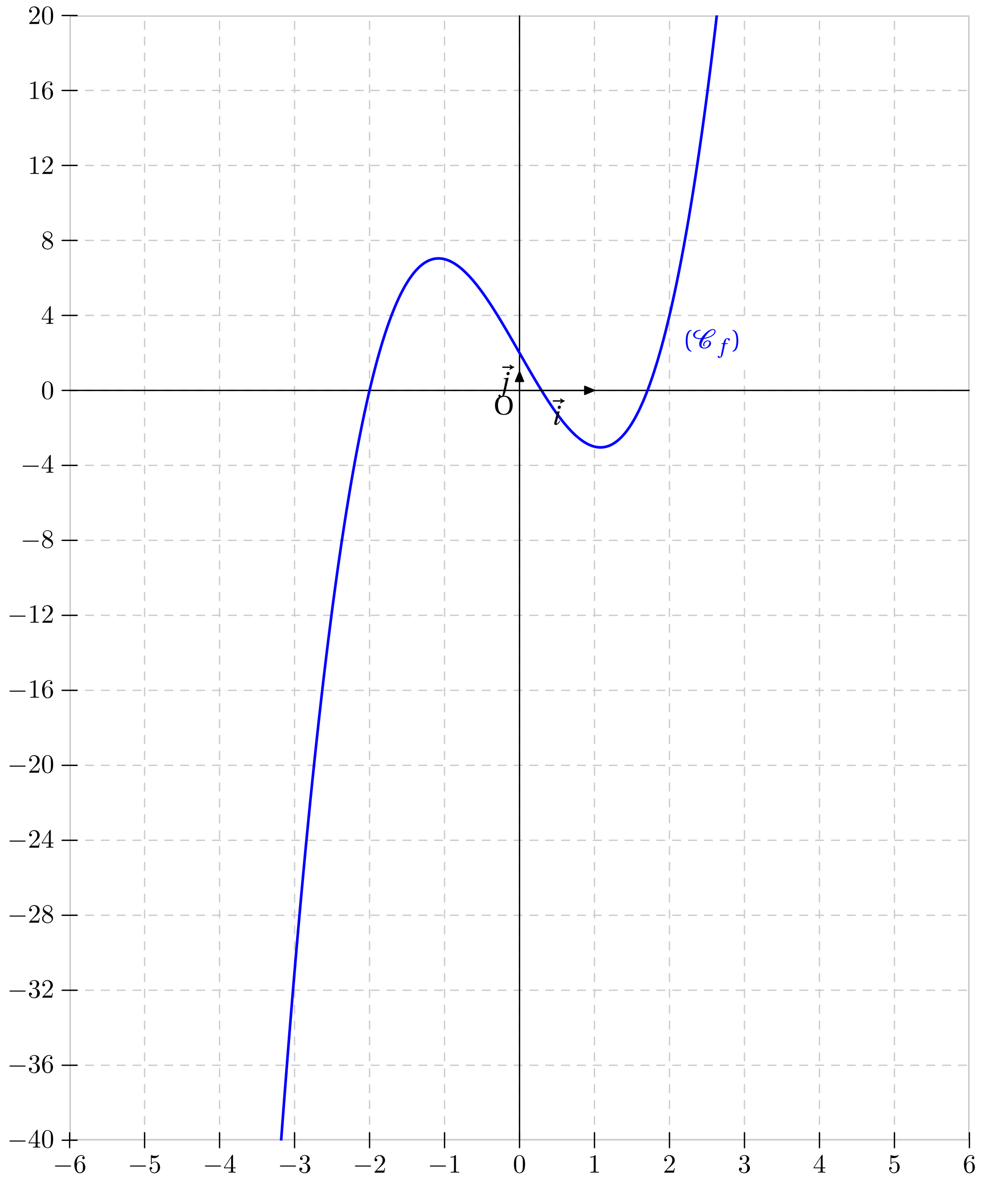
On considère la fonction polynôme définie par :

$$Q(x) = 2x^3 - 7x + 2.$$

1) Vérifier que -2 est une racine de Q.

2) Factoriser Q et résoudre l'équation $Q(x) = 0$.

Illustration



Exercice 18

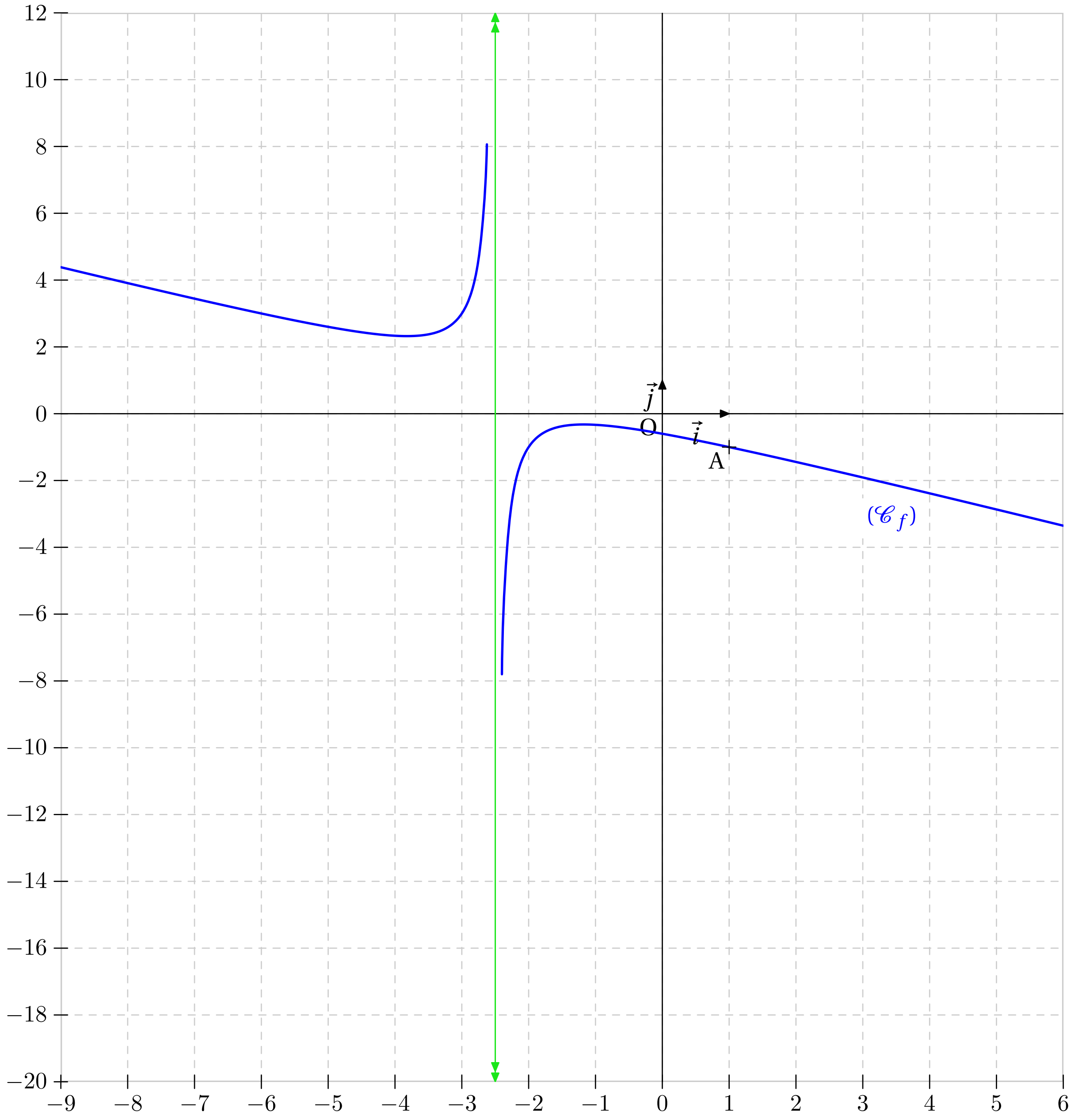
On donne la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3}{-2x^2 - 3x + 5}$.

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?

2) Factoriser le numérateur et le dénominateur de f, puis simplifier l'expression de $f(x)$.

3) Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

Illustration



Exercice 19

On considère la fonction polynôme P définie par :

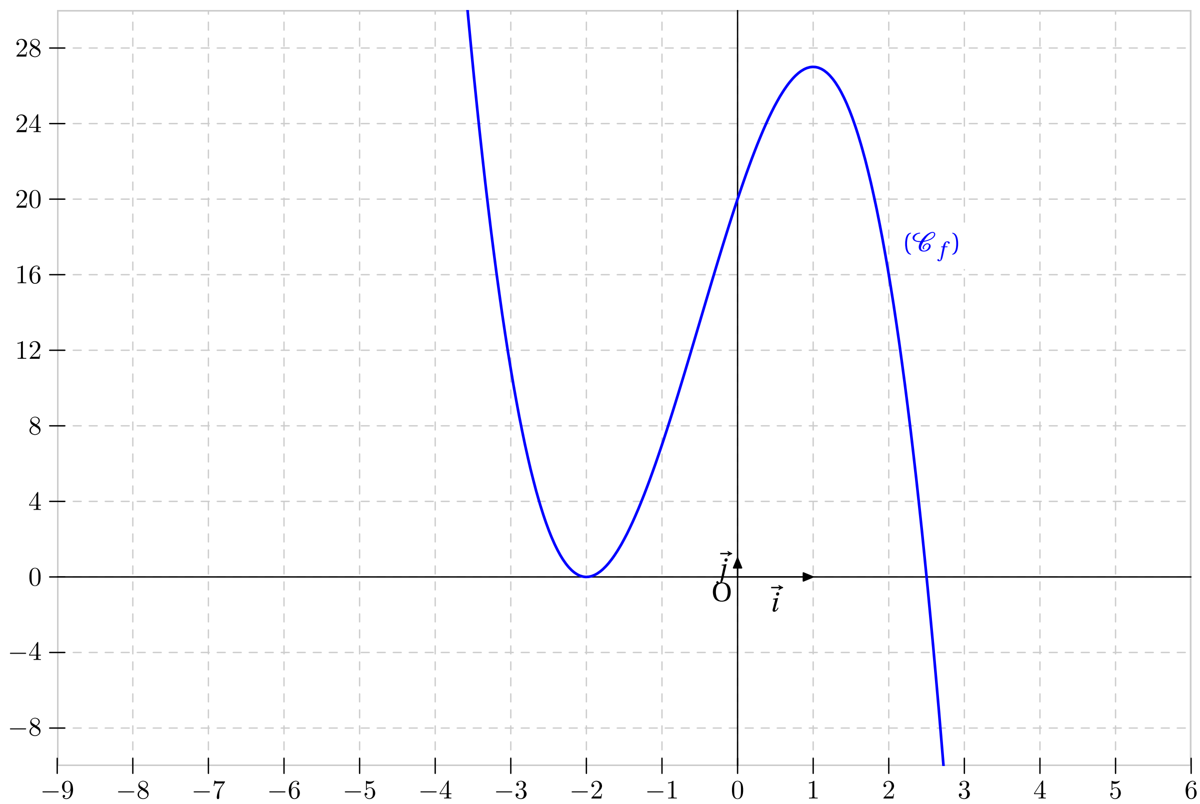
$$P(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 20.$$

1) Vérifier que $\lambda = -2$ est une racine de P.

2) En déduire une factorisation maximale de P.

3) Résoudre l'inéquation : $3x(4-x) \leqslant 2(x^3 - 10)$.

Illustration



Exercice 20

On considère la fonction polynôme P définie par :

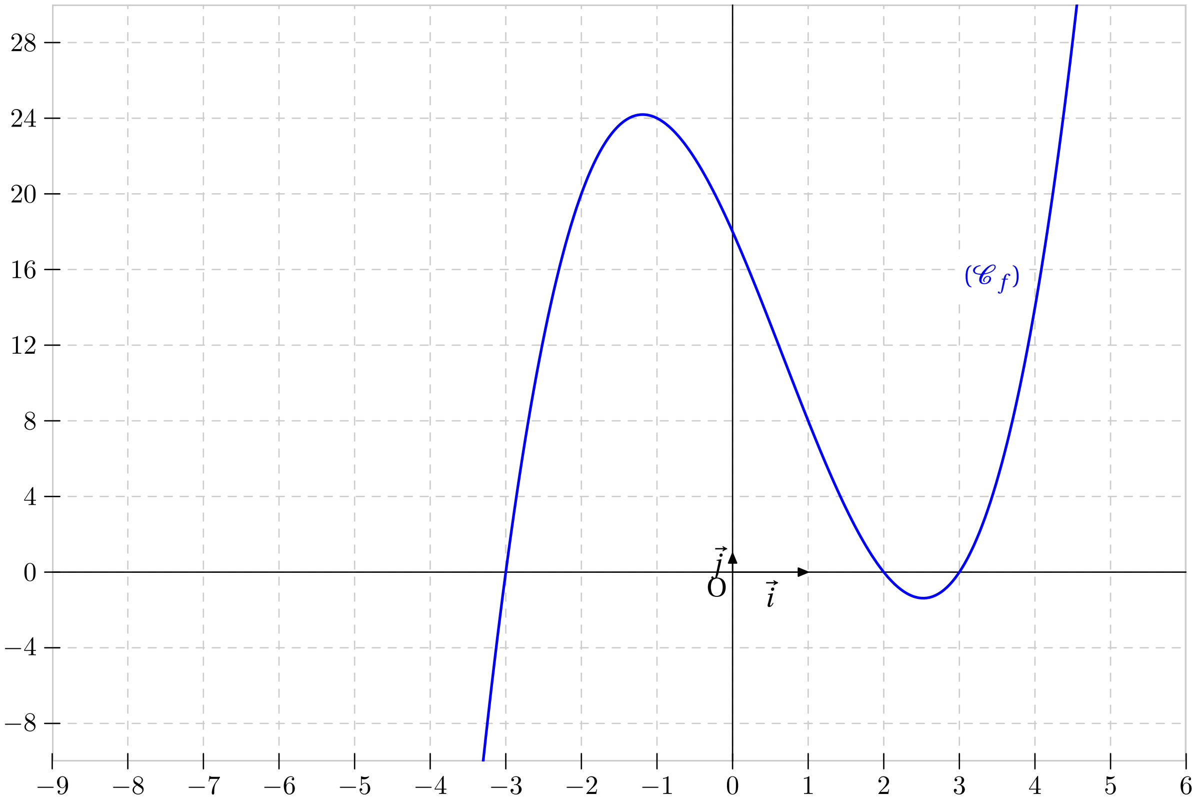
$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18.$$

1) Calculer $P(2)$. En déduire que $x_1 = 2$ est une racine de P.

2) Factoriser P.

3) Résoudre l'inéquation $P(x) \geqslant 0$.

Illustration



Exercice 21

Résoudre l'équation : $x^2 - (J + M)x + JM = 0.$

Exercice 22

Résoudre l'inéquation :

$$x^4 - \left(1 + (M+1)^2\right) x^2 + (M+1)^2 \geqslant 0.$$

Indication : on pourra poser $X = x^2$, puis factoriser et enfin faire un tableau de signes.

Exercice 23

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3Mx^2 - 3\left(M^2 - 1\right)x + 1$.

1) Calculer la dérivée f' de la fonction f et étudier son signe.

2) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
On ne précisera pas les valeurs des éventuels extremums ...

Exercice 24

Le but de l'exercice est d'établir l'égalité :

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1.$$

1) On pose $\alpha=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ et $\beta=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.
Calculer $\alpha^3+\beta^3$ et $\alpha\beta$.

2) Démontrer que, pour tous réels A et B, on a :
$(A^3+B^3)=(A+B)(A^2-AB+B^2)$ puis que $(A^3+B^3)=(A+B)\left((A+B)^2-3AB\right)$.

3) En déduire que le réel $\alpha+\beta$ est solution de l'équation $x^3+3x-4=0$.

4) Résoudre l'équation $x^3+3x-4=0$ puis conclure.

Exercice 25

1) Factoriser sur $\mathbb{R}$ l'expression : $x^3 - 1$.

2) Déterminer les réels A, B et C tels que :

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

Exercice 26

Soit $A(n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Déterminer deux réels a et b tels que : $A(n) = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.

2) Exprimer, en fonction de n, la somme suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Exercice 27

Résoudre l'équation :

$$x + x^3 + x^5 + x^7 = 0.$$

Aide : réfléchir au signe d'une éventuelle solution.

Exercice 28

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \dfrac{3x-2}{x-3}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$.
On appelle $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$.
Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = -3x^2 + 14x - 8$.
On appelle $(\mathcal{C}_g)$ sa courbe représentative dans le repère précédent.

1) **a)** Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente pour $x \neq 3$ à l'équation

$$3x - 2 = (x-3)(3x-2)(4-x).$$

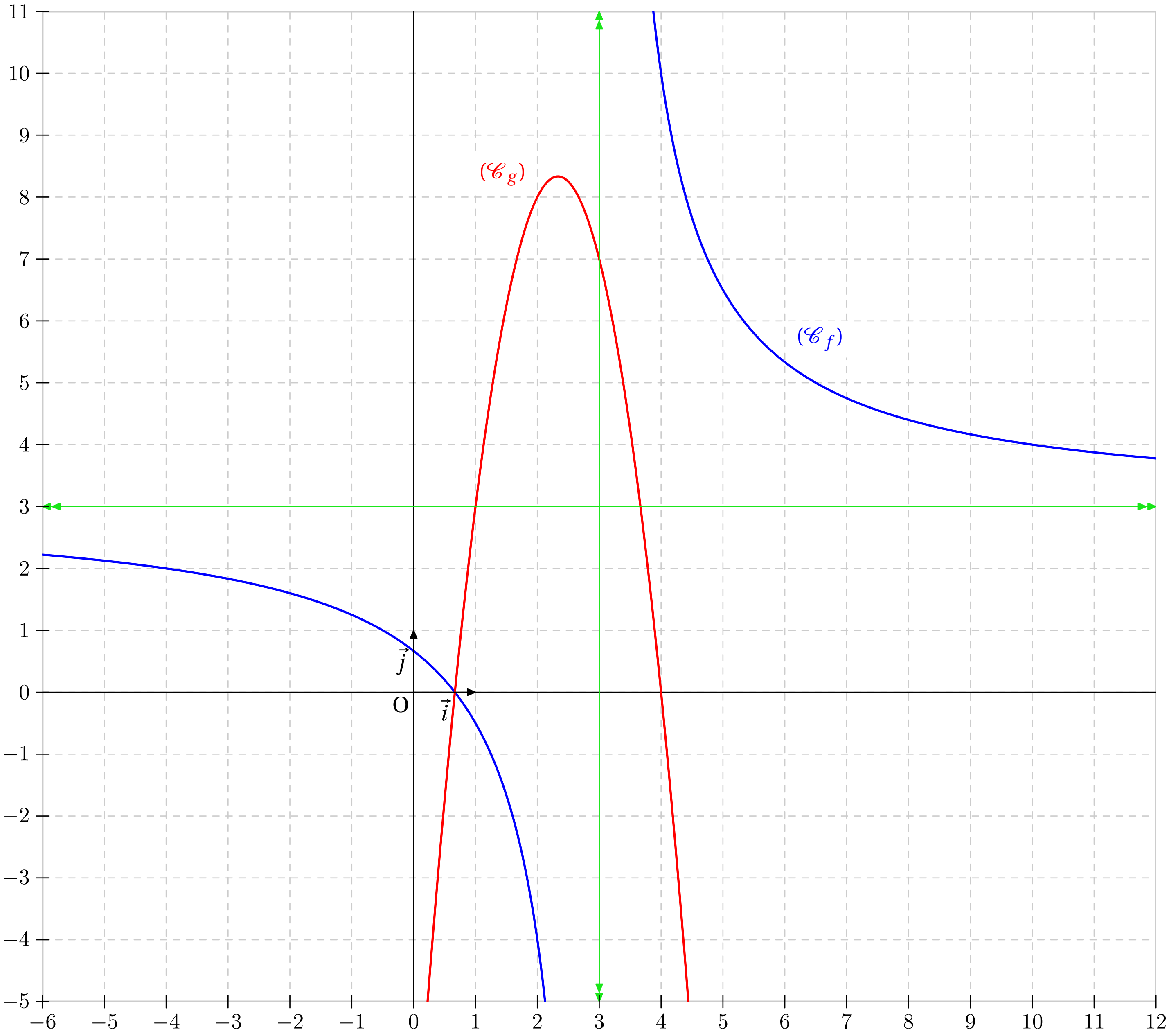
b) Déterminer l'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$. On donnera les valeurs exactes des coordonnées.

2) On considére l'inéquation : $-3x^2 + 14x - 8 \geqslant \dfrac{3x-2}{x-3}$.

a) La résoudre graphiquement à l'aide de votre calculatrice graphique. Indiquer votre méthode sur votre copie.

b) Retrouver ses solutions par une résolution algébrique.

Illustration



Exercice 29

1) Résoudre l'équation $x^4 - 169x^2 + 3600 = 0$.
On posera $X = x^2$.

2) L'aire d'un triangle rectangle est $30\ m^2$ et l'hypoténuse a pour longueur $h = 13\ m$.
Trouver le périmètre.

Exercice 30

On considère la fonction polynôme f définie par

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{7}{6}.$$

On appelle $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

1) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.

2) Dreser le tableau de variations de la fonction f.

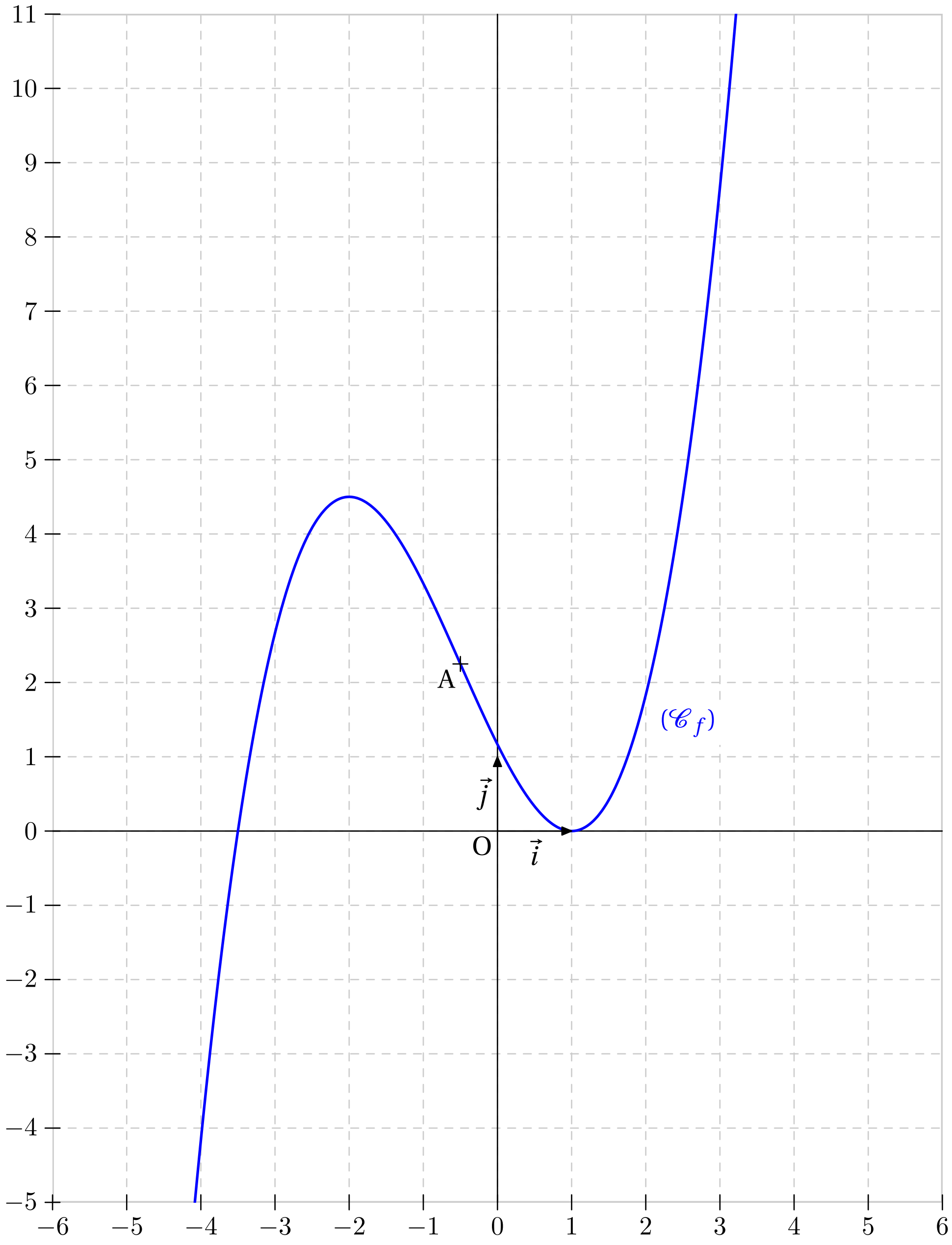
3) Montrer que le point $A\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{9}{4}\right)$ est centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

4) Montrer que le polynôme se factorise par $(x-1)^2$.

5) En déduire les abscisses des points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.

6) Donner une équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.

Illustration



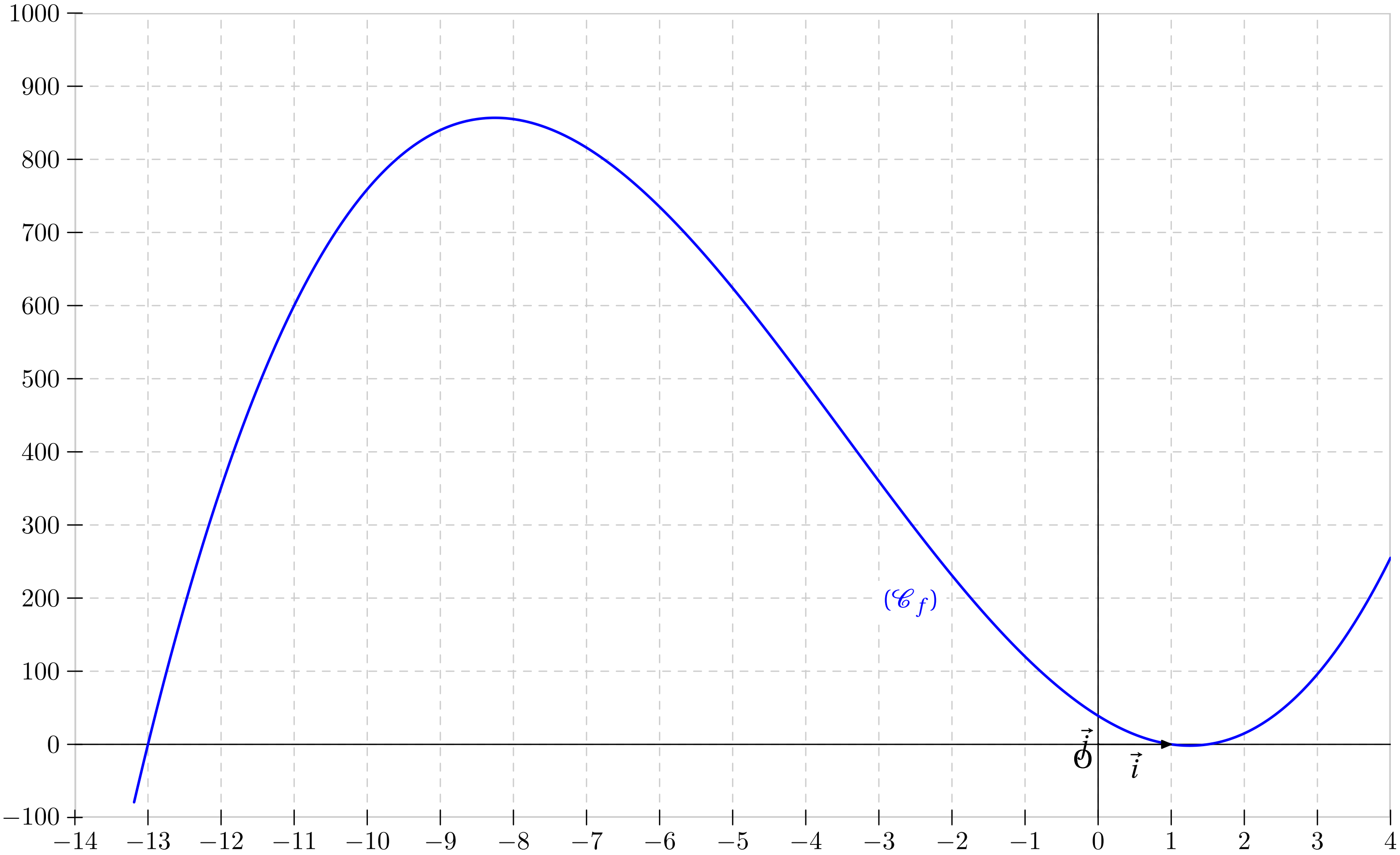
Exercice 31

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 21x^2 - 62x + 39$.

1) Montrer que 1 est une racine de $f(x)$.

2) Déterminer une factorisation de $f(x)$ en produit de trois facteurs du premier degré.

3) Résoudre l'inéquation $P(x) \geqslant 0$.



Exercice 32

Exercice 33

Exercice 34

Exercice 35

Exercice 36

Exercice 37

Exercice 38

Exercice 39

Exercice 40

Exercice 41

Exercice 42

Exercice 43

Exercice 44

Exercice 45

Exercice 46

Exercice 47

Exercice 48

Exercice 49

Exercice 50