

Exercice 1

Etudier les limites suivantes :

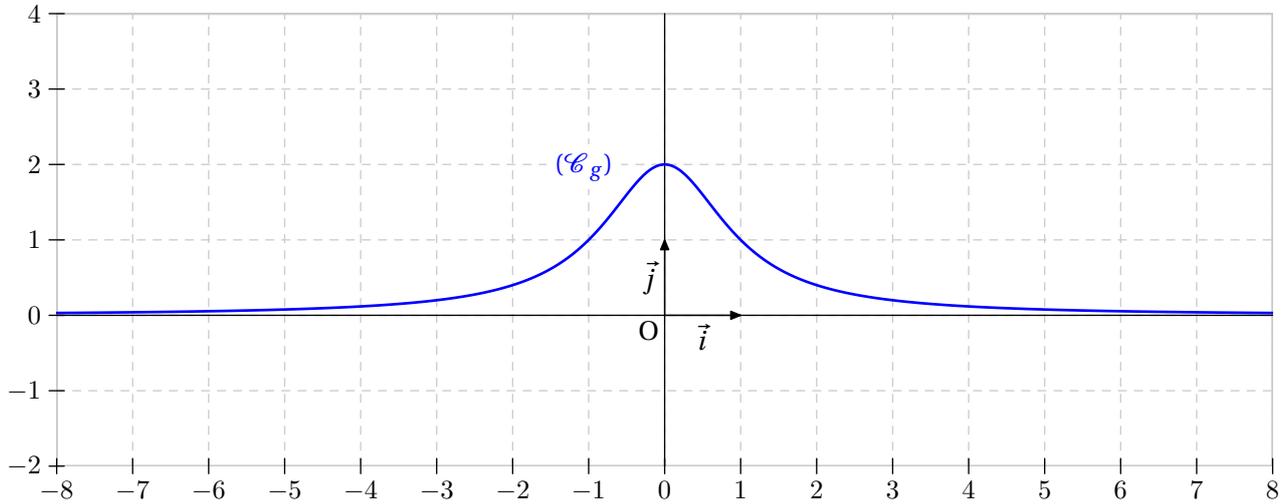
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{x}$$

Exercice 2

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

- 1) Démontrer que $0 < g(x) \leq 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 2) Démontrer que g est décroissante sur $[0 ; +\infty[$ et croissante sur $] -\infty ; 0]$.
- 3) Déterminer la limite (si elle existe) de la fonction g en $+\infty$, en $-\infty$ et en 0. Expliquer le raisonnement.

Illustration

Exercice 3

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \frac{(x^2 - 1)(x - 2001)}{2001}.$$

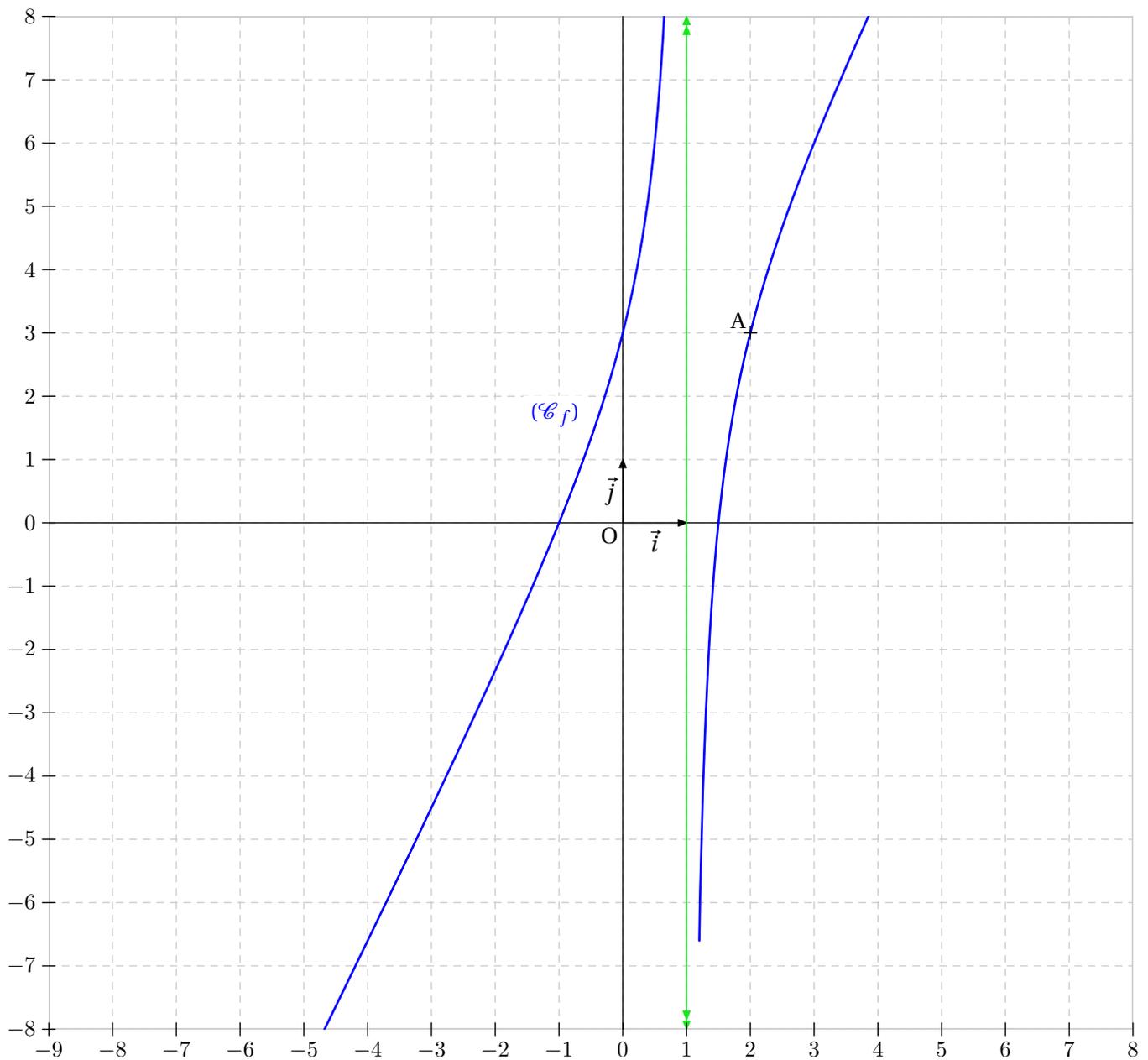
Etudier la limite de g en $+\infty$.

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 - x + 6}{x^2 - 3x + 2}.$$

- 1) Soit $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$.
Vérifier que 2 est racine de P , puis factoriser P par $x - 2$.
- 2) Etudier les limites de f en 2.
- 3) Etudier les limites de f en $-\infty$.
- 4) Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe (C_f) représentant f .

Illustration

Exercice 5

Déterminer les limites simples suivante. On justifiera en décomposant les fonctions.

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 2x + 3 \right)$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3\sqrt{x} + x^2)$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{5}{x} + x^2 \right)$

4) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x} + 3x^2 - 2 \right)$

5) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left(\frac{3}{x-2} + 5x + 7 \right)$

6) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left(\frac{2}{x+2} + \frac{1}{2} \right)$

Exercice 6

Déterminer les limites des fonctions polynômes suivantes. On justifiera en décomposant les fonctions et en factorisant en cas d'indétermination.

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x)$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x)$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 2x^3 + 5x + 4)$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 2x^3 + 5x + 4)$

Exercice 7

Le but de cet exercice est de déterminer les limites en $-\infty$, $+\infty$ et 3 (par valeurs inférieures et supérieures) de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{x - 3}.$$

Pour tout ce qui suit, on note $P(x) = x^2 - 4x + 2$ et $Q(x) = x - 3$.

(C_f) désigne la courbe représentative de f .

1) Etude en $+\infty$ et en $-\infty$.

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} Q(x)$.

Peut-on conclure directement pour $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Démontrer que, pour tout $x \neq 0$, on a :

$$f(x) = x \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{3}{x}}.$$

c) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

d) Y a-t-il une asymptote horizontale à la courbe (C_f) en $+\infty$? Et en $-\infty$? Si oui, en donner une équation.

2) Etude au voisinage de 3.

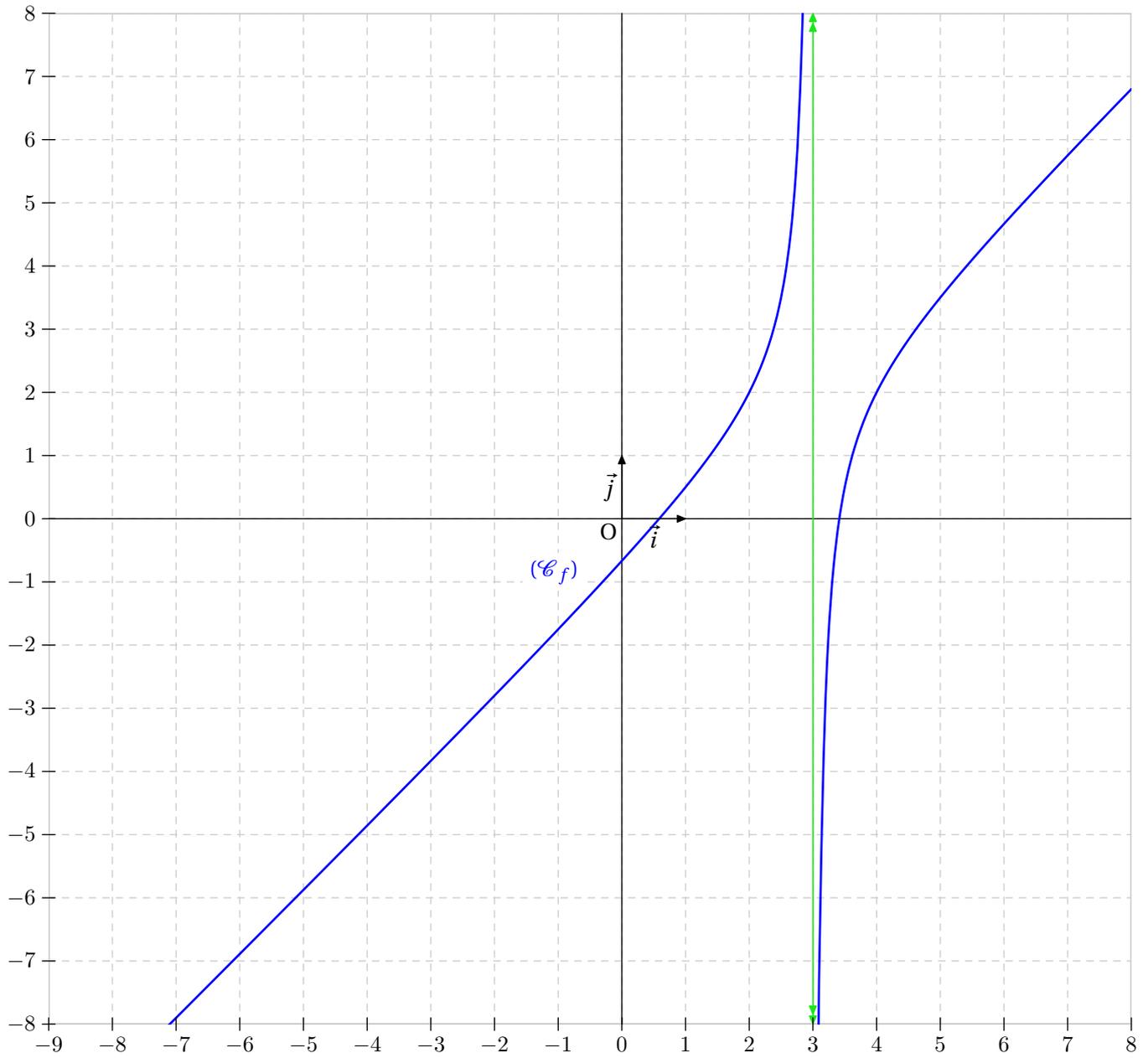
a) Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} P(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} Q(x)$.

En déduire $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x)$.

b) Procéder de même pour $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x)$.

c) Que peut-on dire de la droite d'équation $x = 3$ pour la courbe (C_f) ?

Illustration

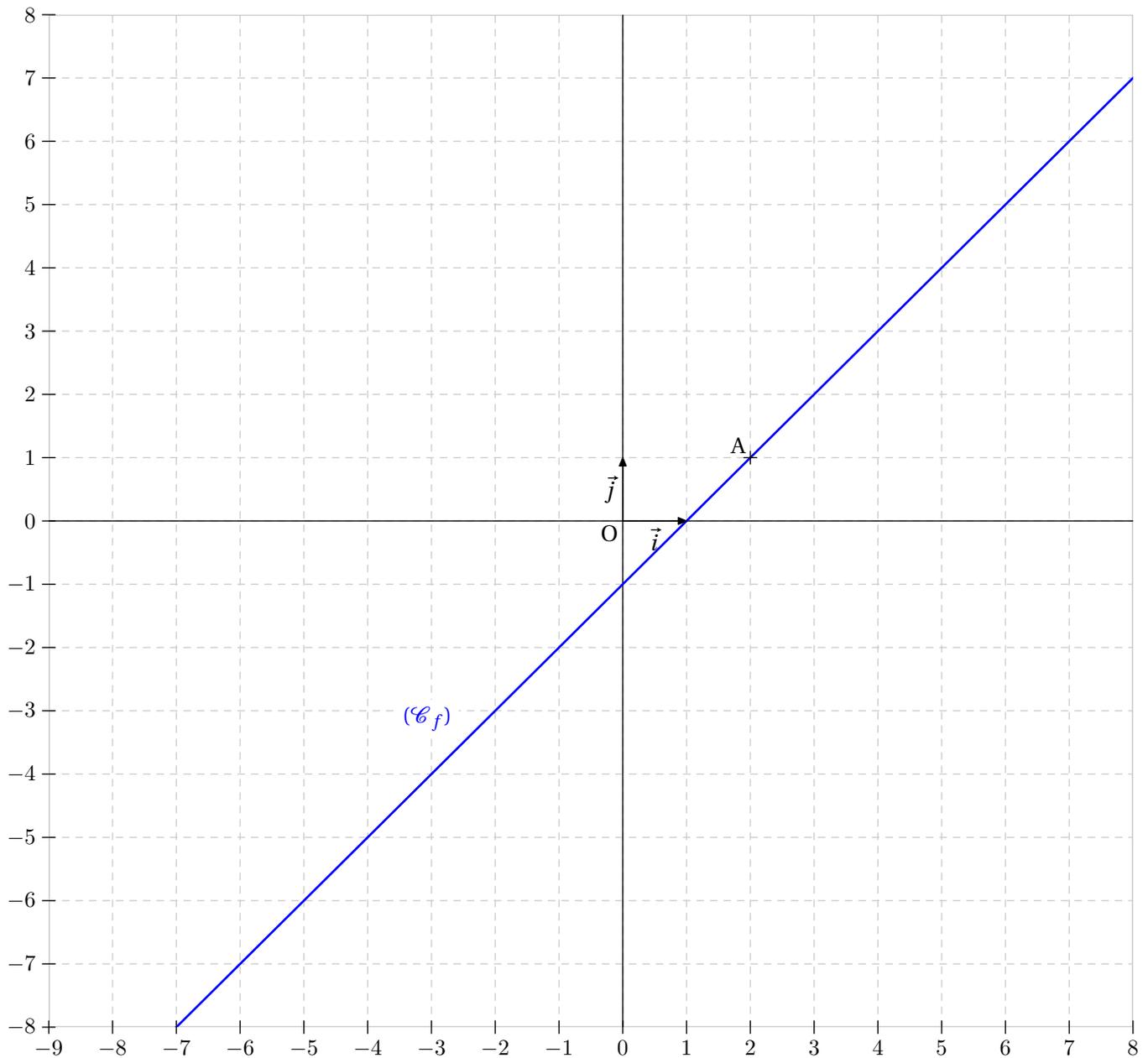


Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}.$$

- 1) Etudier la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2) Etudier la limite de f en 2, par valeurs supérieures puis inférieures.

Illustration

Exercice 9

Déterminer les limites suivantes.

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right)$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}x^3\right)$

3) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x\sqrt{x})$

4) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(-\frac{6}{x^2}\right)$

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par :

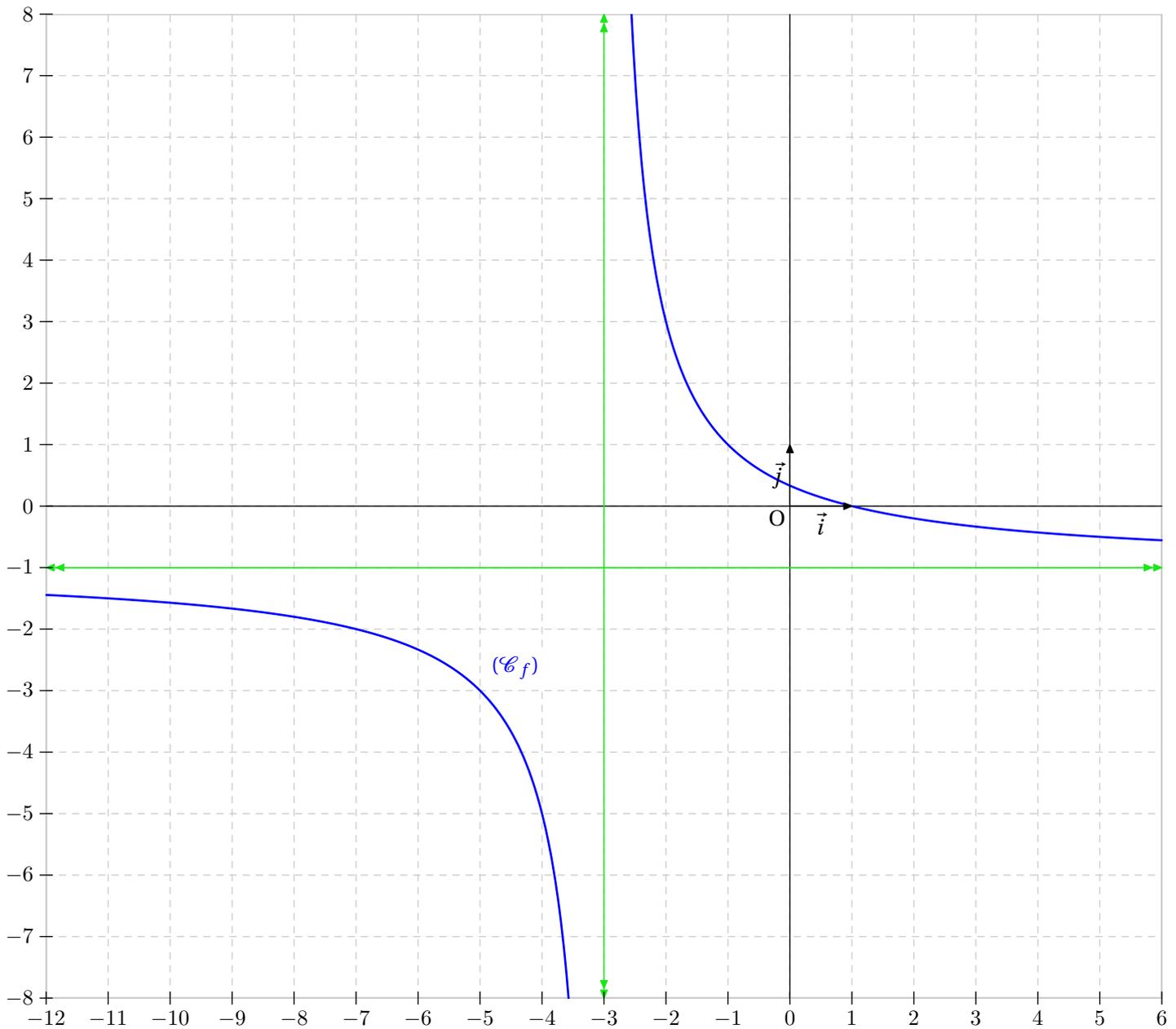
$$f(x) = \frac{-x + 1}{x + 3}.$$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

En déduire l'existence d'une asymptote horizontale dont on précisera l'équation.

- 2) Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} f(x)$.

En déduire l'existence d'une asymptote verticale dont on précisera l'équation.

Illustration

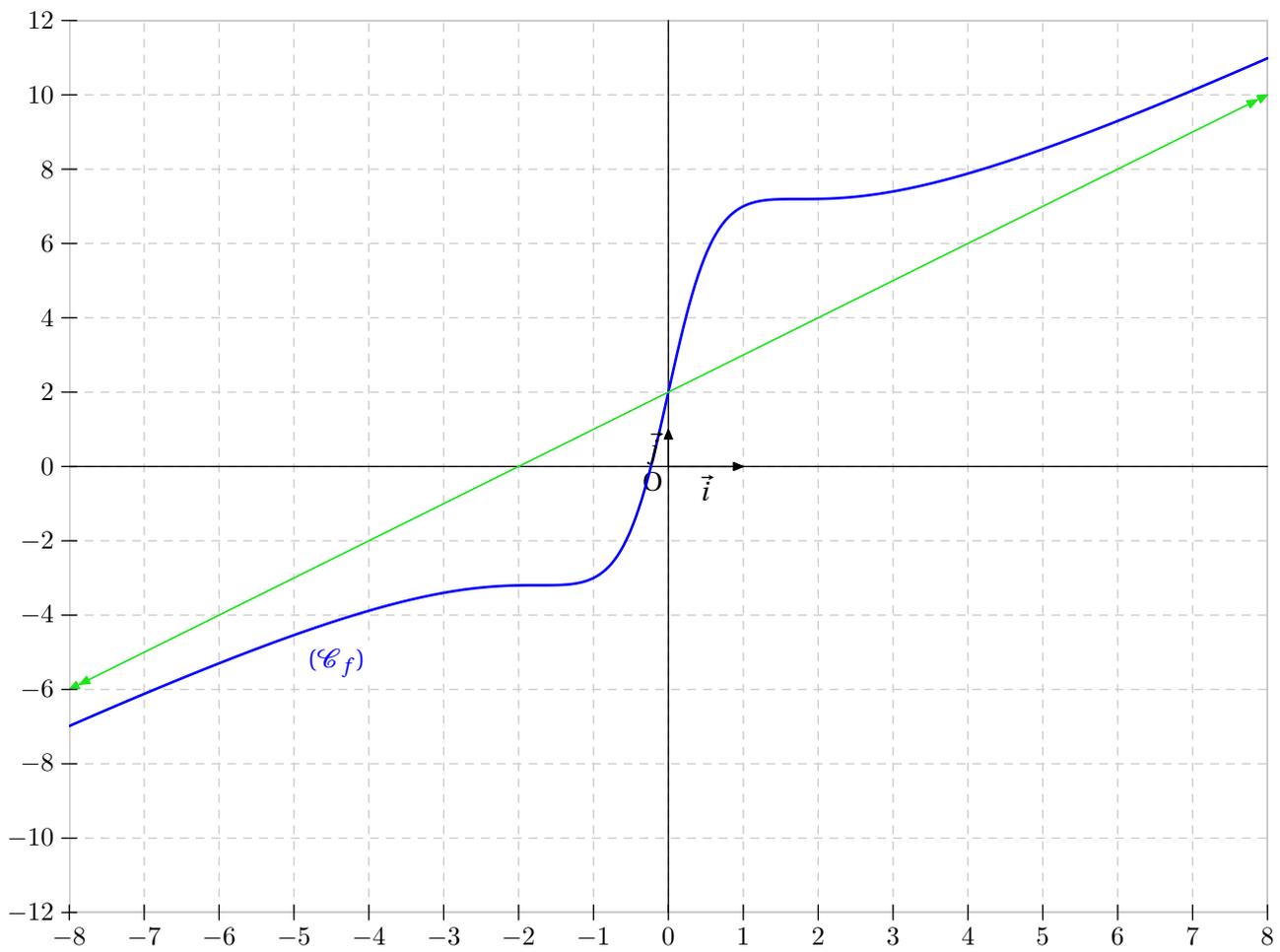
Exercice 11

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 9x + 2}{x^2 + 1}.$$

On note (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative.

- 1) Déterminer trois réels a , b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2 + 1}$.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 3) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à la courbe (\mathcal{C}_f) .
- 4) Préciser la position relative de (\mathcal{C}_f) et de (Δ) .

Illustration

Exercice 12

Soit f la fonction définie pour $x \in [1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}.$$

Le but de l'exercice est d'étudier la limite de f en $+\infty$.

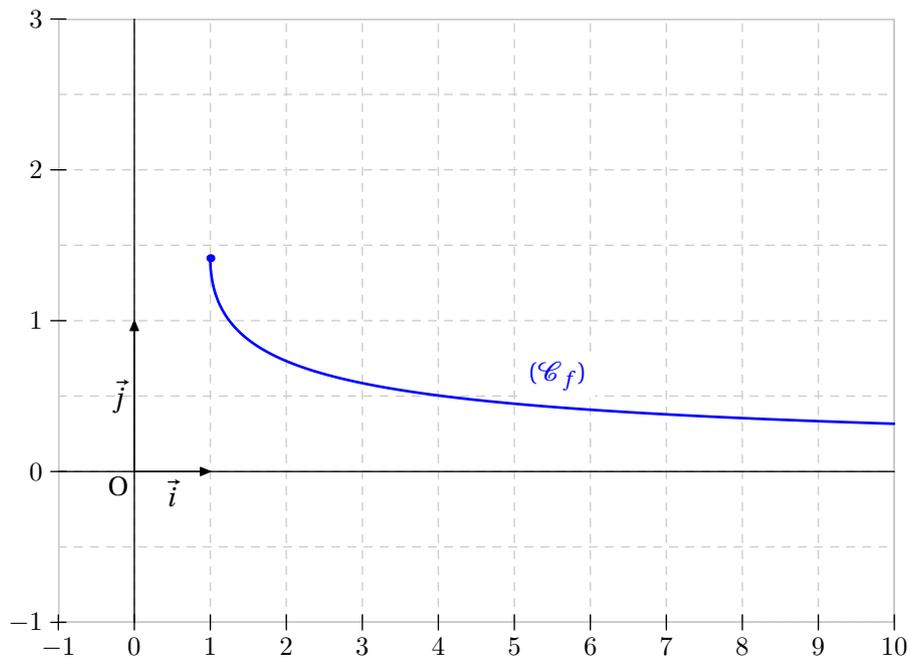
1) Démontrer que pour tous réels A et B strictement positifs, on a :

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}.$$

2) En déduire que pour tout $x \in [1 ; +\infty[$, on a :

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.$$

3) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Illustration

Exercice 13

1) Soient λ, μ des réels et k un réel non nul.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \lambda + \frac{k}{x - \mu}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Démontrer que la courbe (C_f) représentant la fonction f admet une asymptote horizontale et une asymptote verticale dont on précisera les équations (en fonction de λ et μ).

Remarque : les courbes (C_f) sont des hyperboles.

2) Soient a, b, c et d des réels avec $c \neq 0$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ par :

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

a) Déterminer des réels λ, μ et k tels que : $f(x) = \lambda + \frac{k}{x - \mu}$.

b) En déduire que la courbe (C_f) représentant la fonction f admet une asymptote horizontale et une asymptote verticale dont on précisera les équations (en fonction de a, b, c et d).

Exercice 14

On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; 3[\cup] 3 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 10}{3 - x}.$$

On appelle (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer les limites de f en 3.

Quelle conséquence graphique en tire-t-on pour (C_f) ?

2) a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout réel $x \neq 3$,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{3 - x}.$$

En déduire que la droite (D) d'équation $y = 2 - x$ est asymptote à (C_f) .

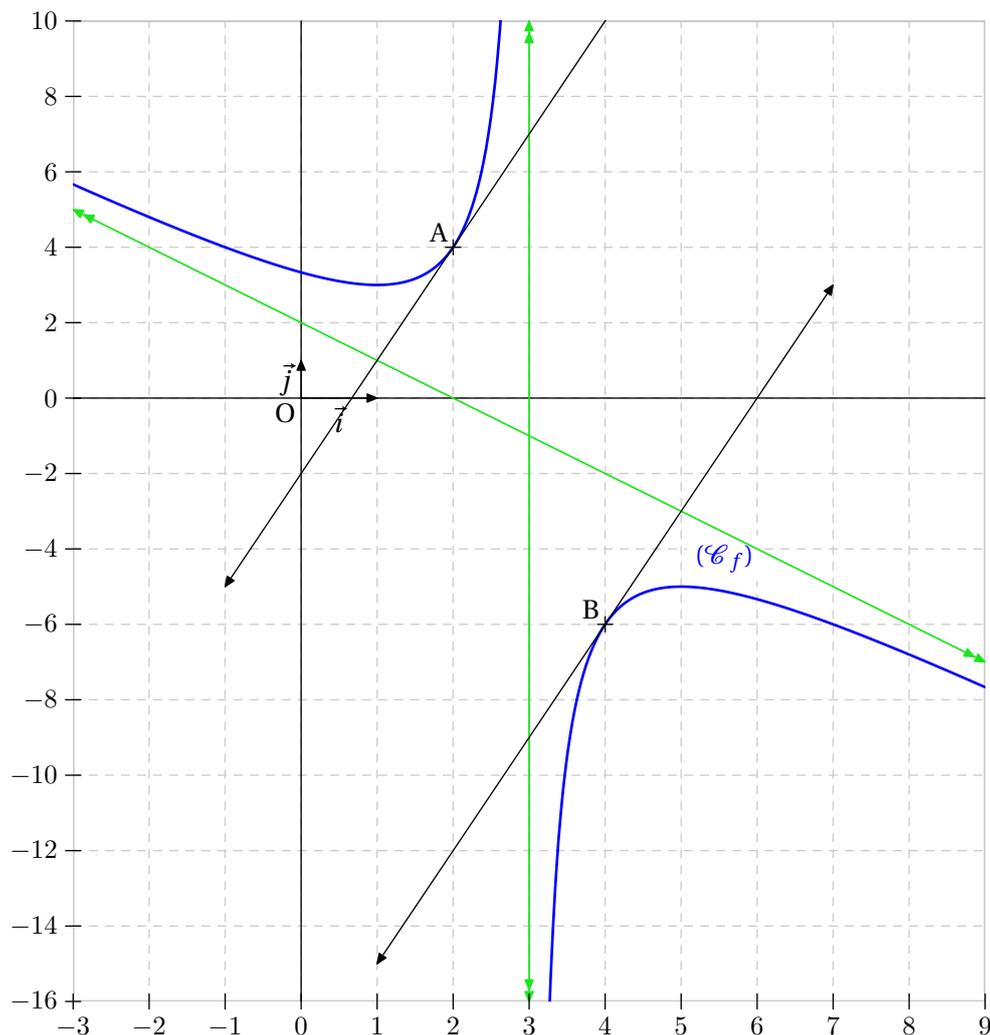
3) a) Calculer la dérivée f' de f .

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

4) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 3x - 2$ est tangente à (C_f) au point d'abscisse 2.

b) Etudier la position relative de (Δ) et (C_f) .

5) Déterminer l'équation de la droite (Δ') qui est parallèle à (Δ) et qui soit tangente à (C_f) .

Illustration

Exercice 15

On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; 1[\cup] 1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{1 - x}.$$

On appelle (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

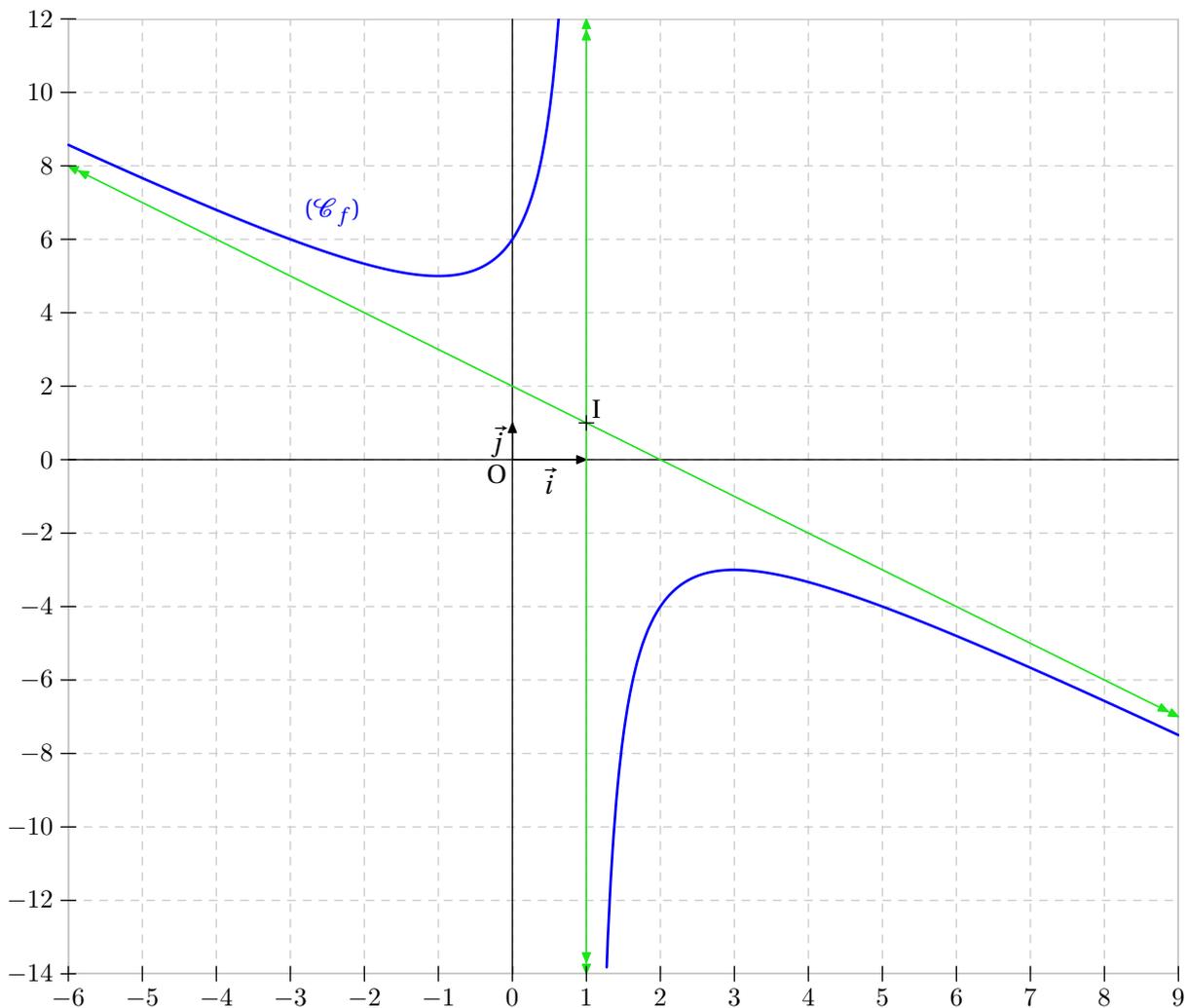
- 1) Déterminer les limites de f en 1.
Quelle conséquence graphique en tire-t-on pour (C_f) ?
- 2) a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel $x \neq 1$,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{1 - x}.$$

En déduire que la droite (D) d'équation $y = 2 - x$ est asymptote à (C_f) .

- c) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à (D) .
- 3) On appelle I le point d'intersection des deux asymptotes de (C_f) . Démontrer que I est le centre de symétrie de (C_f) .
- 4) a) Calculer la dérivée f' de f .
b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

Illustration



Exercice 16

Exercice 17

Exercice 18

Exercice 19

Exercice 20

Exercice 21

Exercice 22

Exercice 23

Exercice 24

Exercice 25

Exercice 26

Exercice 27

Exercice 28

Exercice 29

Exercice 30

Exercice 31

Exercice 32

Exercice 33

Exercice 34

Exercice 35

Exercice 36

Exercice 37

Exercice 38

Exercice 39

Exercice 40

Exercice 41

Exercice 42

Exercice 43

Exercice 44

Exercice 45

Exercice 46

Exercice 47

Exercice 48

Exercice 49

Exercice 50