Exercice 1 Parité

Etudier la parité de chacune des fonctions suivantes :

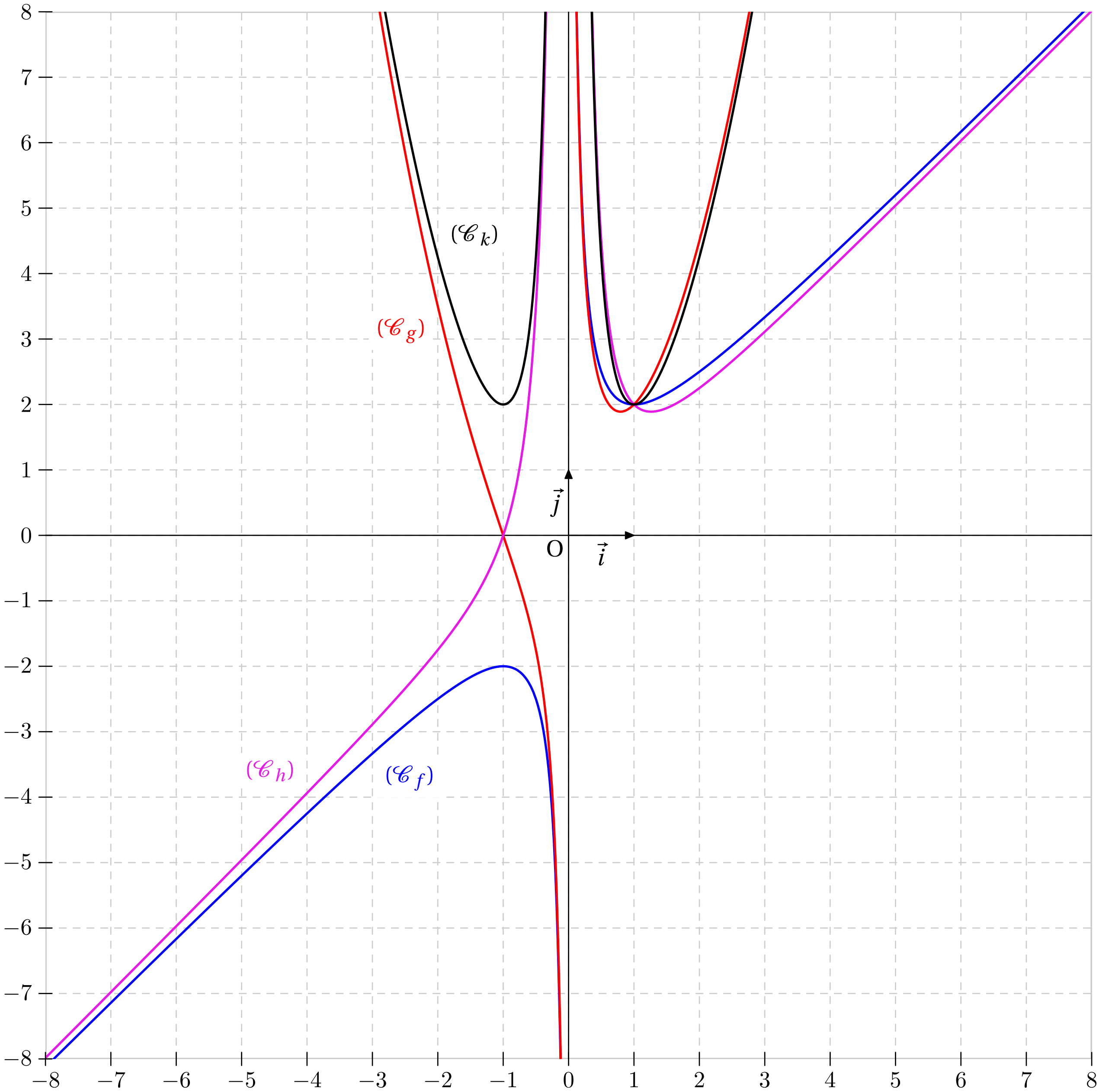
$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

$g(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

$h(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

$k(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

Illustration



Exercice 2 Composée

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$.

Donner une formule explicite de la fonction $f \circ g$ lorsque :

$$g(x) = \sqrt{x-1} \text{ sur } [1\ ;\ +\infty[\qquad\qquad g(x) = 1 - \frac{1}{x} \text{ sur } \mathbb{R}^*.$$

Exercice 3 Comparaison de fonctions

Le but de cet exercice est de comparer les deux fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \sqrt{1+x} \text{ et } g(x) = 1 + \frac{x}{2} \text{ sur l'intervalle } [-1~;~+\infty[.$$

1) Montrer que $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [-1~;~+\infty[$.

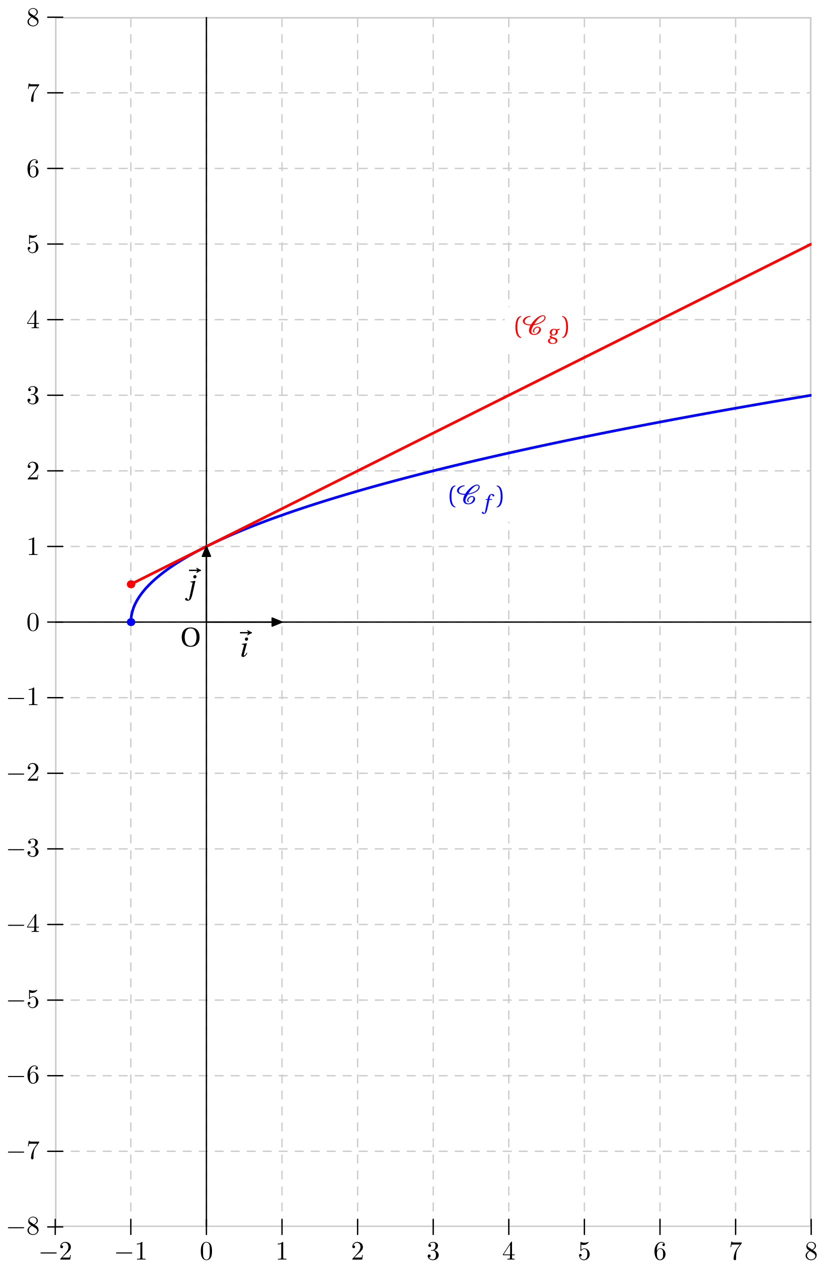
2) Calculer $(f(x))^2$ et $(g(x))^2$.

3) Démontrer que $(f(x))^2 \leqslant (g(x))^2$ pour tout $x \in [-1~;~+\infty[$.

4) En déduire une comparaison de f et g sur l'intervalle $[-1~;~+\infty[$.

5) Tracer sur un même repère les représentations graphiques de f et g sur l'intervalle $[-1~;~+\infty[$.

Illustration



Exercice 4 Comparaison de fonctions

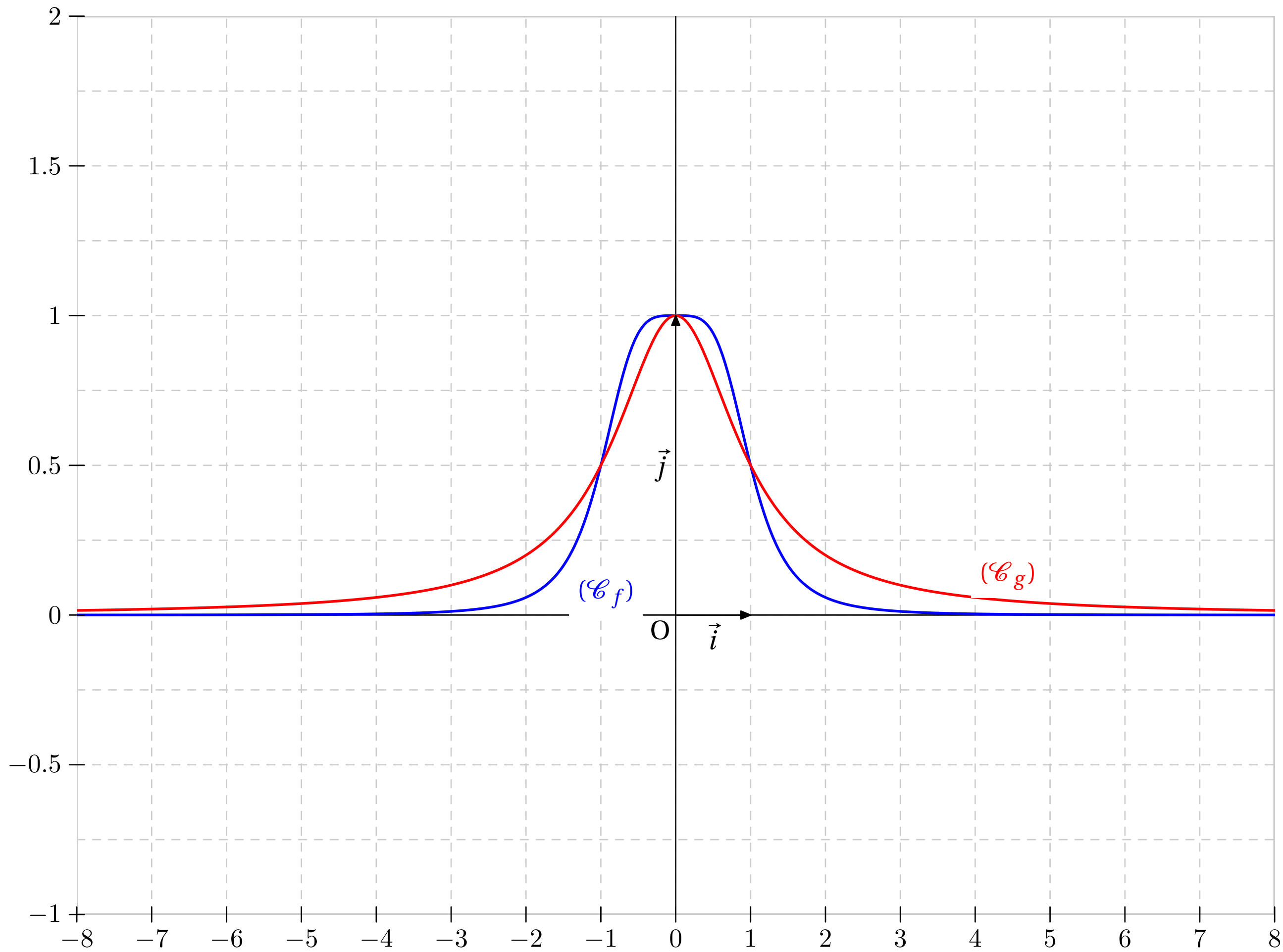
Le but de cet exercice est de comparer les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4} \text{ et } g(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

1) Calculer $f(x) - g(x)$. On réduira au même dénominateur.

2) En déduire l'intervalle sur lequel on a $f \geqslant g$.

Illustration



Exercice 5 Sens de variation

On considère la fonction f définie par $f(x) = x(1-x)$ sur $\mathbb{R}$.

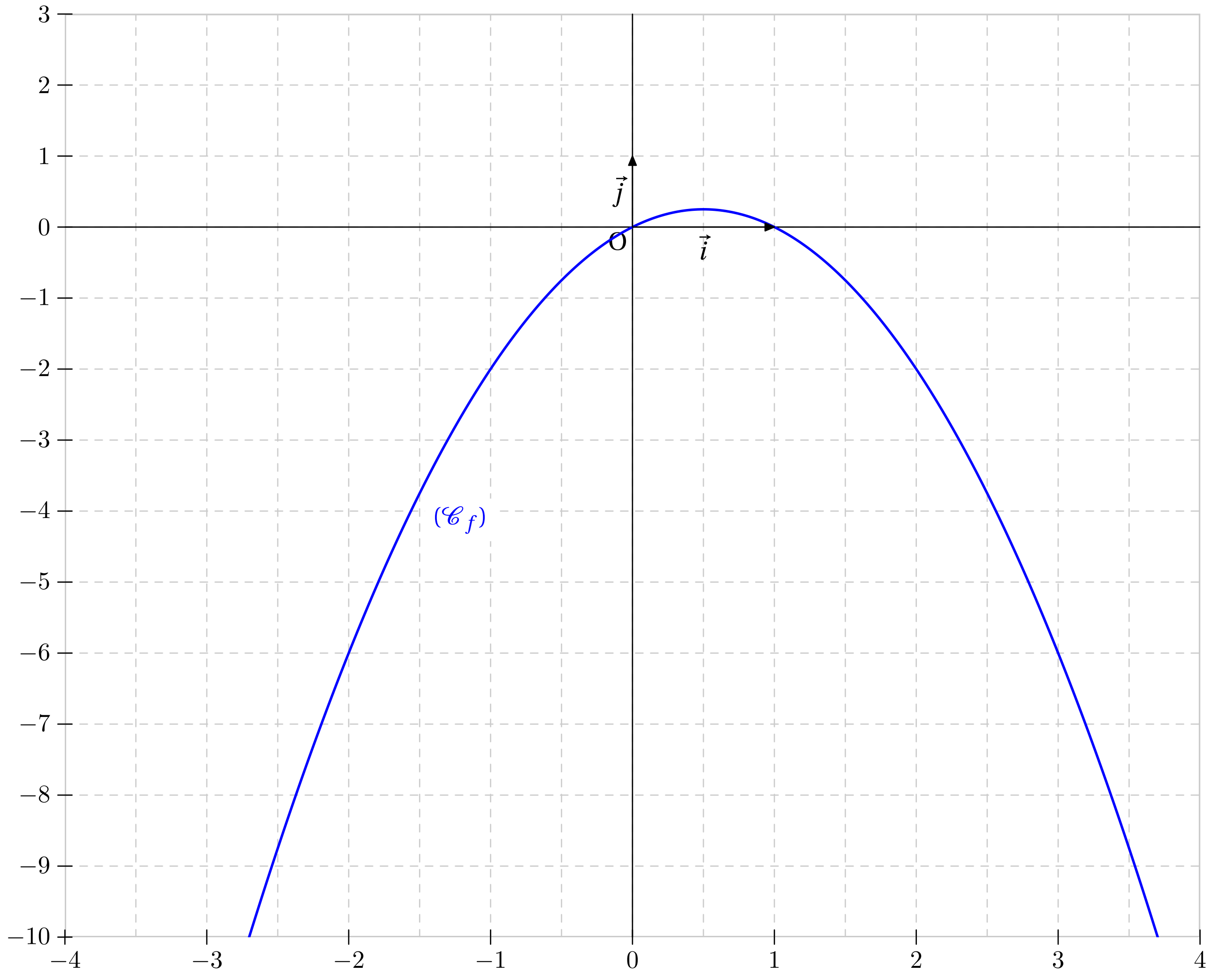
1) Démontrer que $f(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) En déduire que la fonction f admet un maximum en $x = \dfrac{1}{2}$.

3) Démontrer que $f(x) = \dfrac{1}{4} - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$.

4) En déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ \dfrac{1}{2}[$ et décroissante sur $]\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty[$.

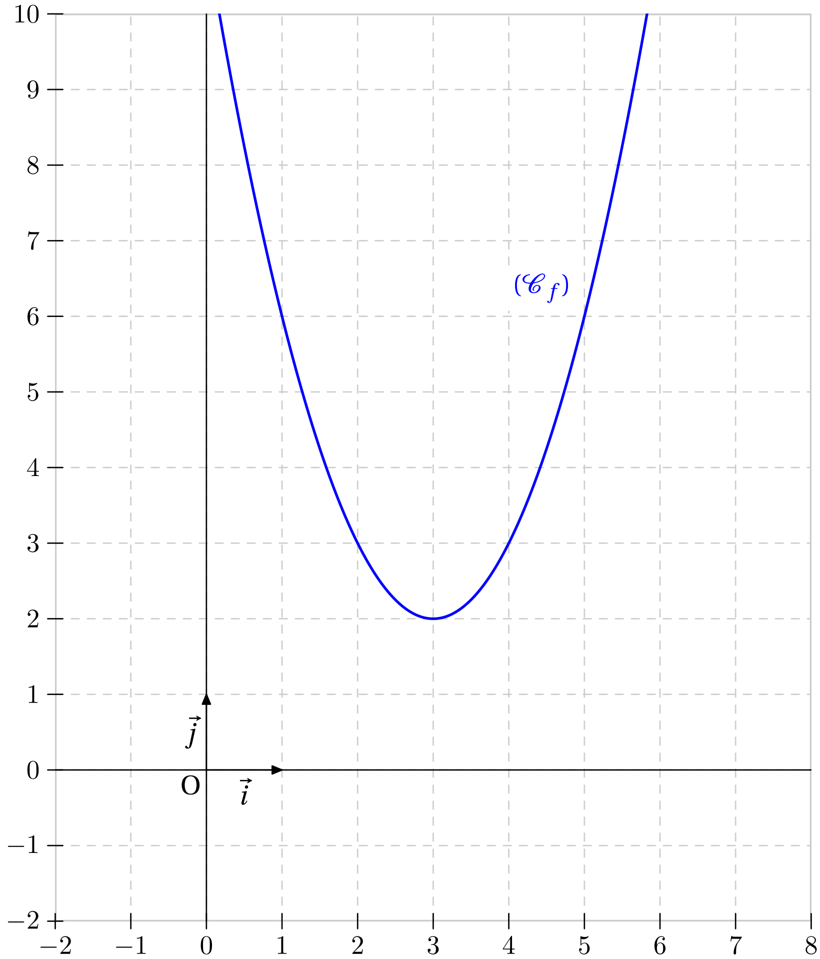
Illustration



Exercice 6 **Sens de variation d'une fonction composée**

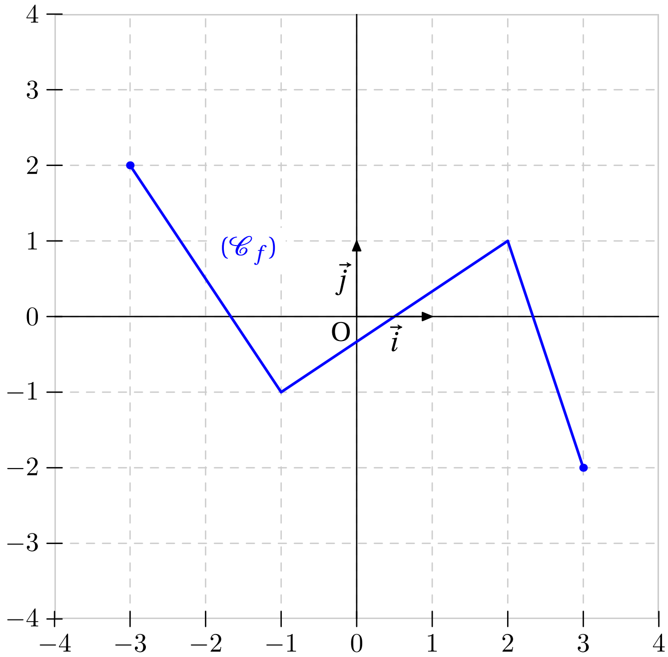
Donner une décomposition de la fonction f définie par $f(x) = (x-3)^2 + 2$ qui permette d'en déduire son sens de variation sur l'intervalle $I =]-\infty\ ;\ 3]$.

Illustration



Exercice 7 Fonction associée

On considère la fonction f définie sur $[-3\ ;\ 3]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



Préciser l'ensemble de définition et représenter chacune des fonctions définies ci-dessous :
$f_1(x) = -f(x)$
$f_2(x) = |f(x)|$
$f_3(x) = f(x) + 1$
$f_4(x) = f(x + 1)$

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \to x + \dfrac{1}{x}$.

Soit g la fonction définie $\mathbb{R}^*$ par $x \to x - \dfrac{1}{x}$.

1) Montrer que f est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$ et décroissante sur $]0\ ;\ 1]$. Qu'en est-il de g ?

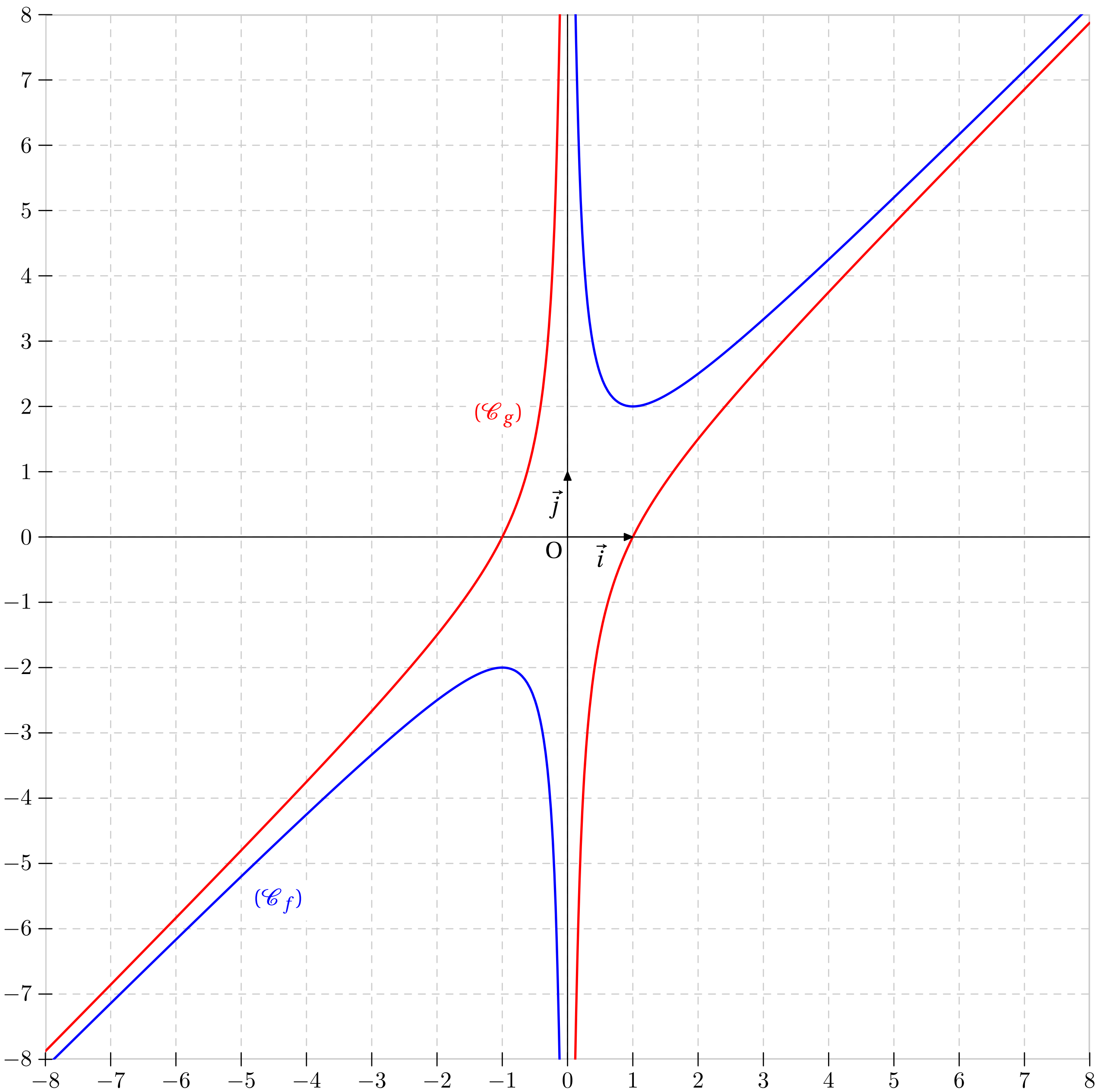
2) Tracer les courbes représentatives de f et g dans un même repère.

3) Préciser si f est majorée, minorée, bornée ou non sur les intervalles suivants :

$$\left[\frac{1}{2}\ ;\ 3\right],\ [1\ ;\ +\infty[\text{ et }]0\ ;\ 1].$$

On utilisera le fait qu'une fonction monotone sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ est encadrée par $f(a)$ et $f(b)$.

Illustration



Exercice 9

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\left(1 - x^2\right)^2}{1 + x^2}.$$

1) Déterminer son ensemble de définition.

2) Démontrer que f est une fonction positive sur $\mathbb{R}$.

3) Etudier la parité de la fonction f.

4) Tracer soigneusement la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f. On se limitera à l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$.

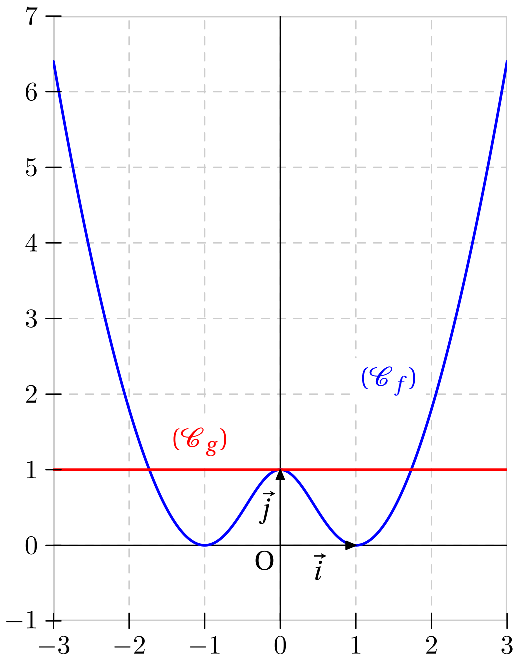
5) Donner par lecture graphique la valeur du maximum de la fonction f sur ;

  a) l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$;

  b) l'intervalle $[-2\ ;\ 1]$.

6) Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 1$.

Illustration



Exercice 10

On considère la fonction f définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(x-2)$.

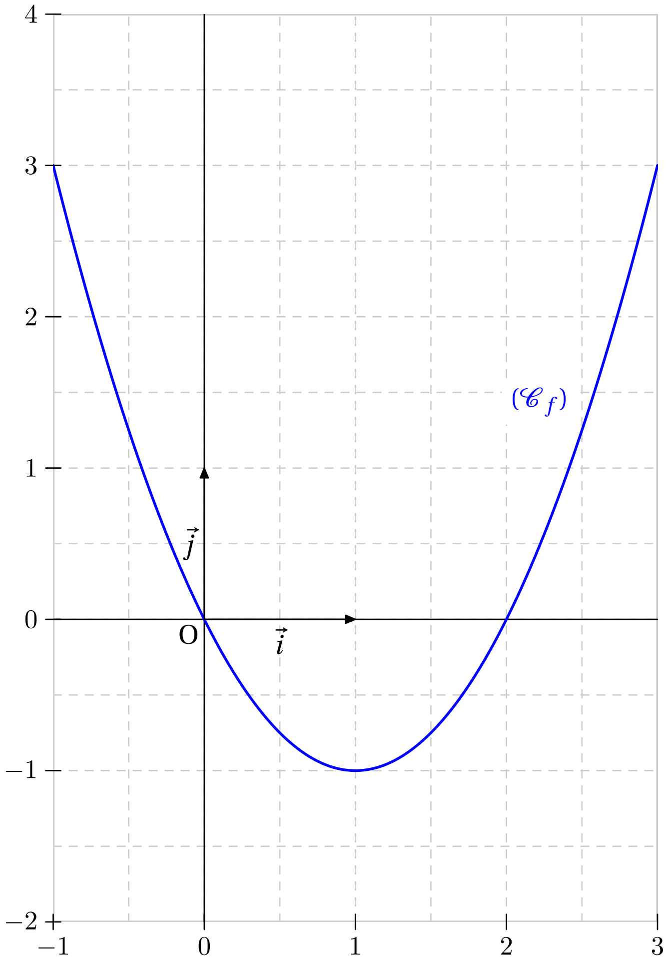
1) Etudier la parité de la fonction f.

2) Démontrer que $f(x) = (x-1)^2 - 1$.

3) Démontrer que la fonction f est minorée par -1.

4) Tracer soigneusement la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f. On se limitera à l'intervalle $[-1\ ;\ 3]$.

Illustration



Exercice 11

On considère la fonction f définie par ;

$$f(x) = x\sqrt{4 - x^2}.$$

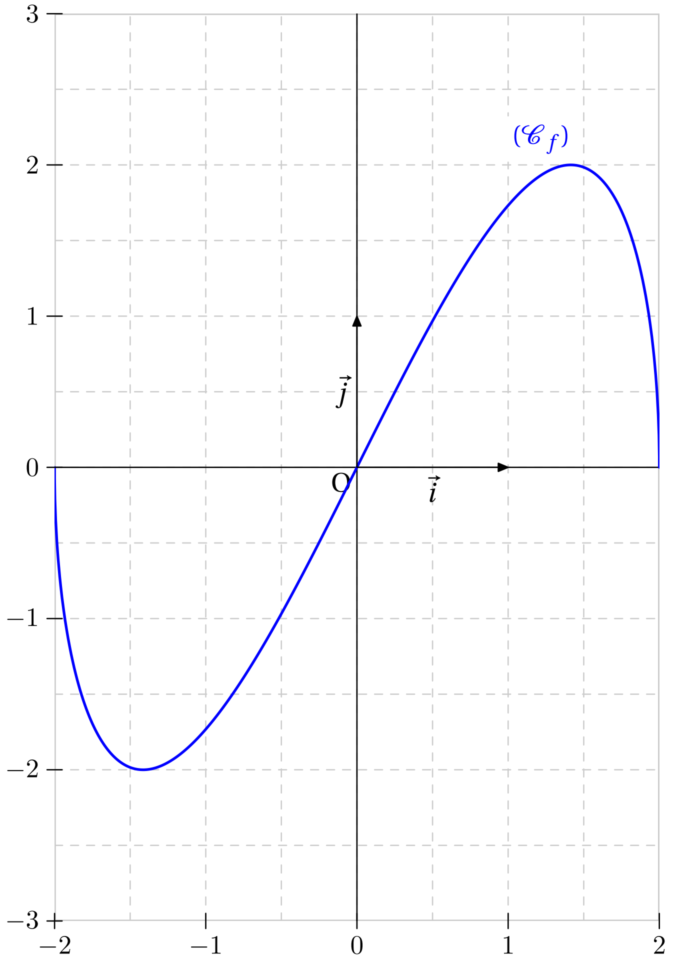
1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Etudier la parité de la fonction f.

3) Tracer soigneusement la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f.

4) Démontrer que f admet un maximum $M = 2$. On pourra déterminer le signe de $[f(x)]^2 - 4$.

Illustration



Exercice 12

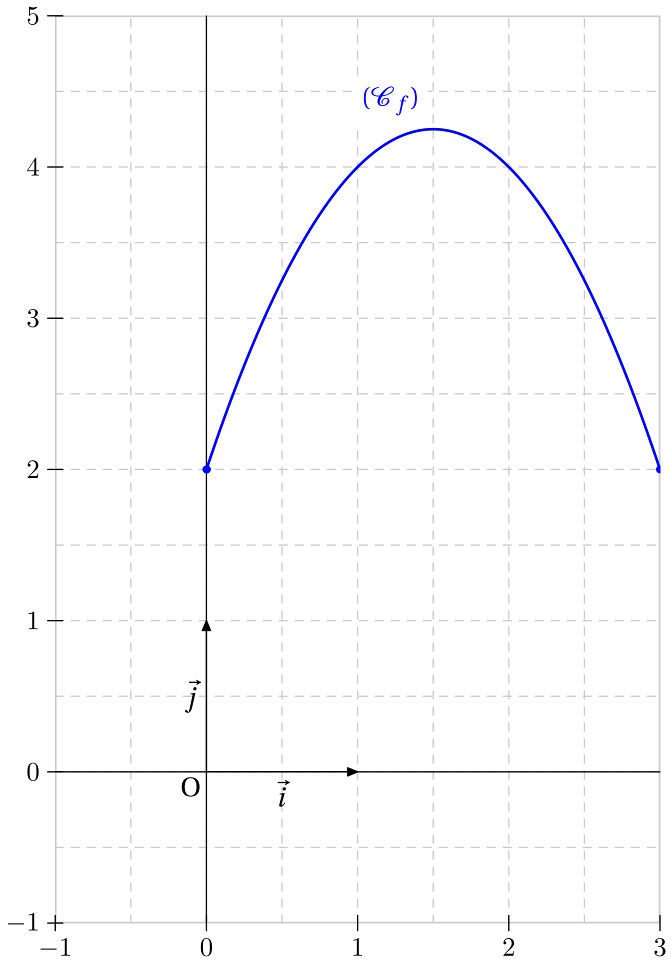
On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ 3]$ par $f(x) = -x^2 + 3x + 2$.

1) Démontrer que $f(x) = (1 - x)(x - 2)$.

2) Tracer la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 3]$.

3) Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

Illustration



Exercice 13

Tout le monde connait bien la propreté suivante :

Soient A et B deux réels. Si $AB = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.

1) Considérons les fonctions f et g définies sur $I = [-1\ ;\ 1]$ par :

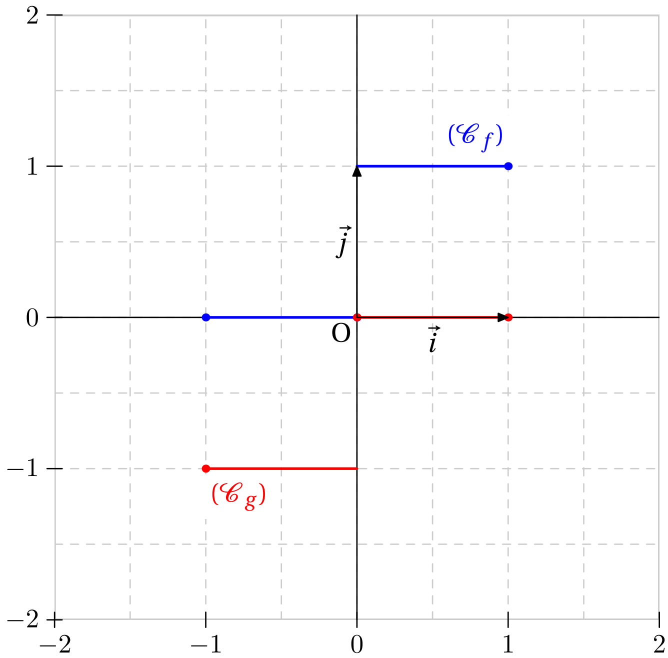
$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{et } g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \geqslant 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

a) Représenter graphiquement les fonctions f et g.

b) Que vaut le produit fg sur I ? La propriété énoncée ci-dessus pour des réels est-elle vraie pour des fonctions ?

2) Soit f une fonction définie sur un intervalle I et k un nombre réel non nul. On suppose que : $k\,f = 0$ sur I. Que dire de la fonction f sur I ?

Illustration



Exercice 14

Le but du problème est de comparer les deux nombres suivants :

$$A = \frac{1,000\,000\,2}{1,000\,000\,4} \text{ et } B = \frac{0,999\,999\,6}{0,999\,999\,8}.$$

1) Soient f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{1+2x}{1+4x} \text{ et } g(x) = \frac{1-4x}{1-2x}.$$

a) Quels sont les ensembles de définition $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ des fonctions f et g ?

b) Que vaut $f(10^{-7})$? Que vaut $g(10^{-7})$

2) Pour comparer les nombres A et B, on va comparer les fonctions f et g en étudiant la différence $f(x) - g(x)$.

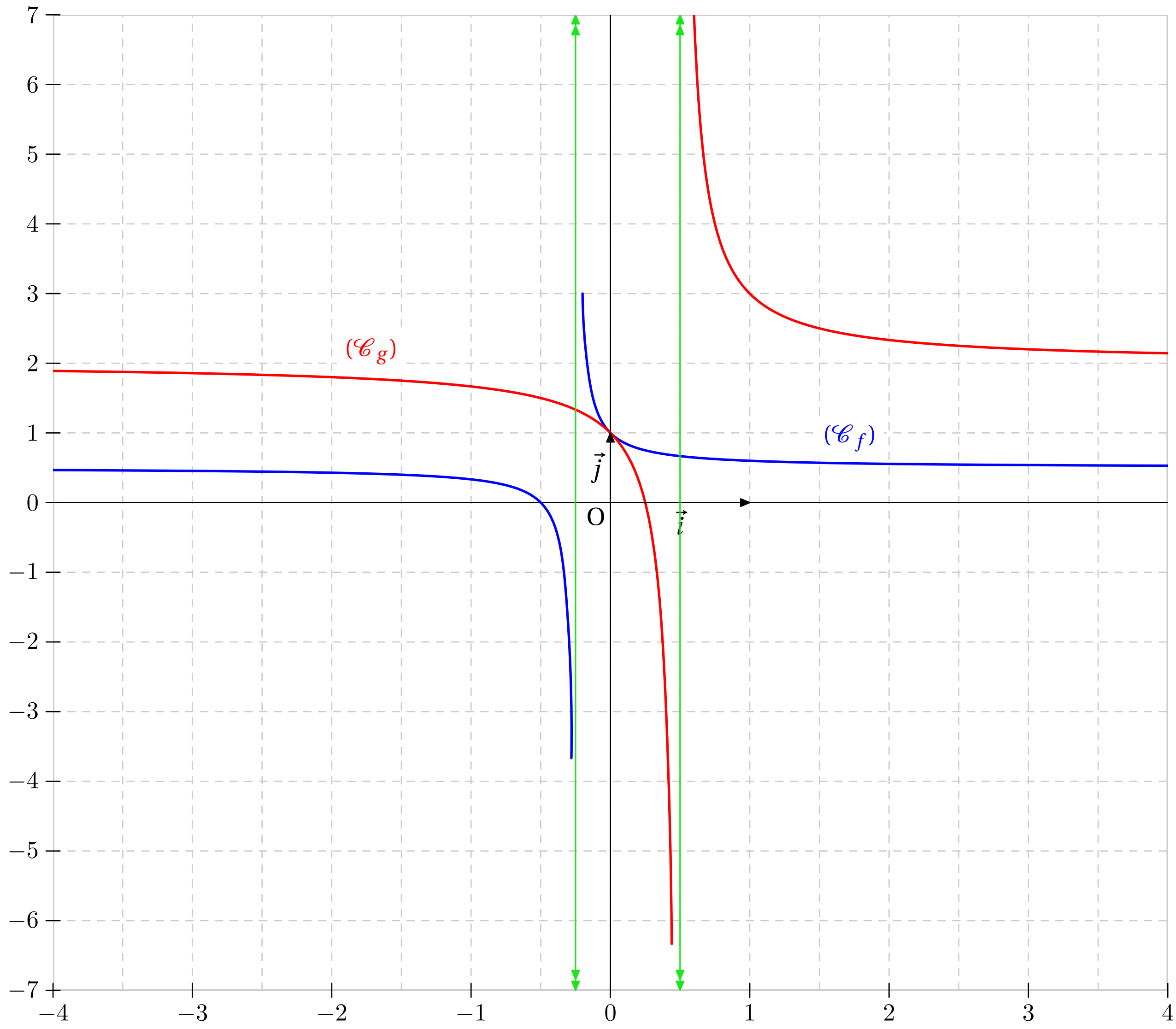
a) Démontrer que : $f(x) - g(x) = \dfrac{12x^2}{(1+4x)(1-2x)}$.

b) Résoudre l'inéquation : $f(x) - g(x) > 0$.

c) En déduire le signe de $f(10^{-7}) - g(10^{-7})$.

d) Conclure.

Illustration



Exercice 15

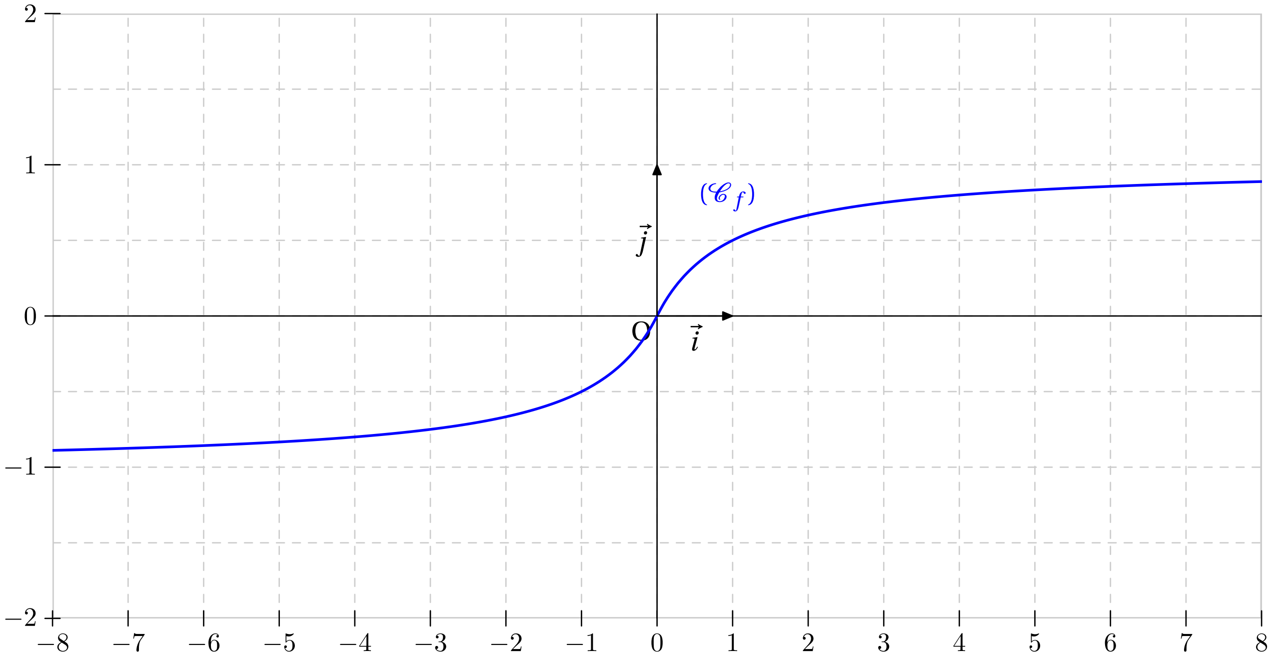
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

1) Etudier la parité de la fonction f.

2) Démontrer que $f(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Tracer la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f.

Illustration



Exercice 16

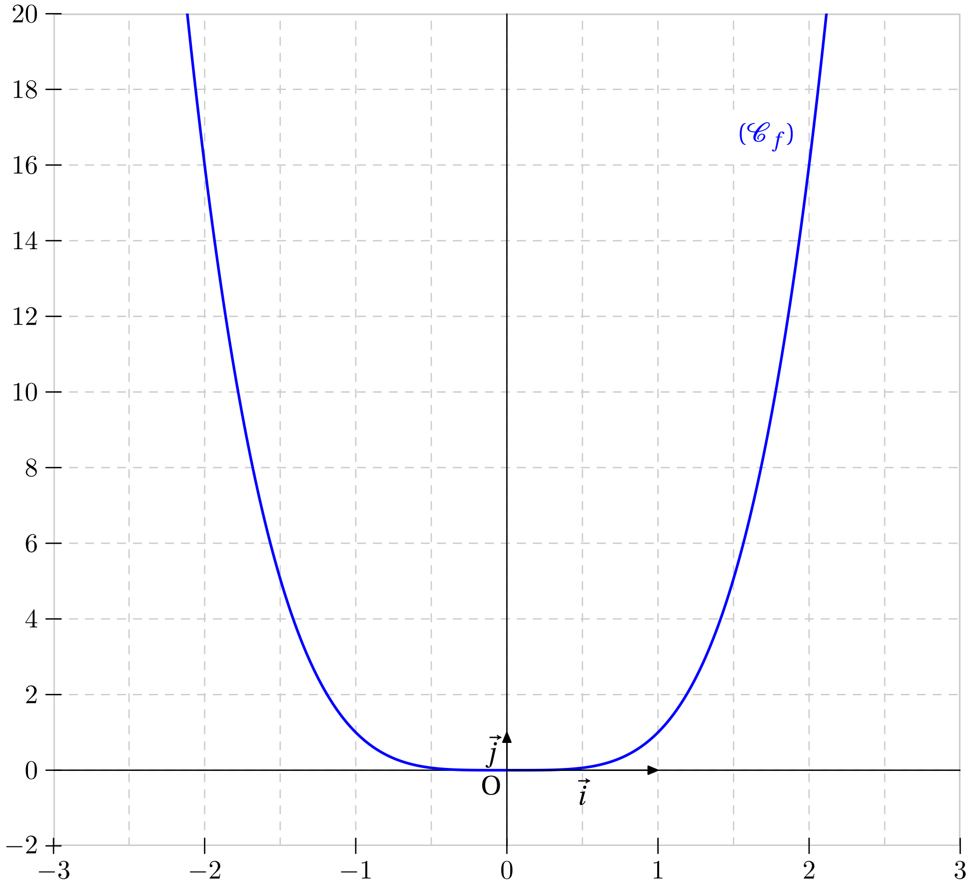
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4$.

1) Démontrer que, quels que soient les réels X et Y, on a : $X^4 - Y^4 = (X - Y)(X + Y)(X^2 + Y^2)$.

2) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3) Etudier la parité de f. En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty\ ;\ 0]$.

Illustration



Exercice 17

Le but de ce problème est de comparer les nombres suivantes :

$$A = 1,000\,000\,2 \text{ et } B = \sqrt{1,000\,000\,4}.$$

1) Soient f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \sqrt{1+x} \text{ et } g(x) = 1 + \frac{x}{2}.$$

a) Quels sont les ensembles de définition $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ des fonctions f et g ?

b) Que vaut $f(4 \times 10^{-7})$? Que vaut $g(4 \times 10^{-7})$

2) Pour comparer les nombres A et B, on va comparer les fonctions f et g en étudiant la différence $f(x) - g(x)$.

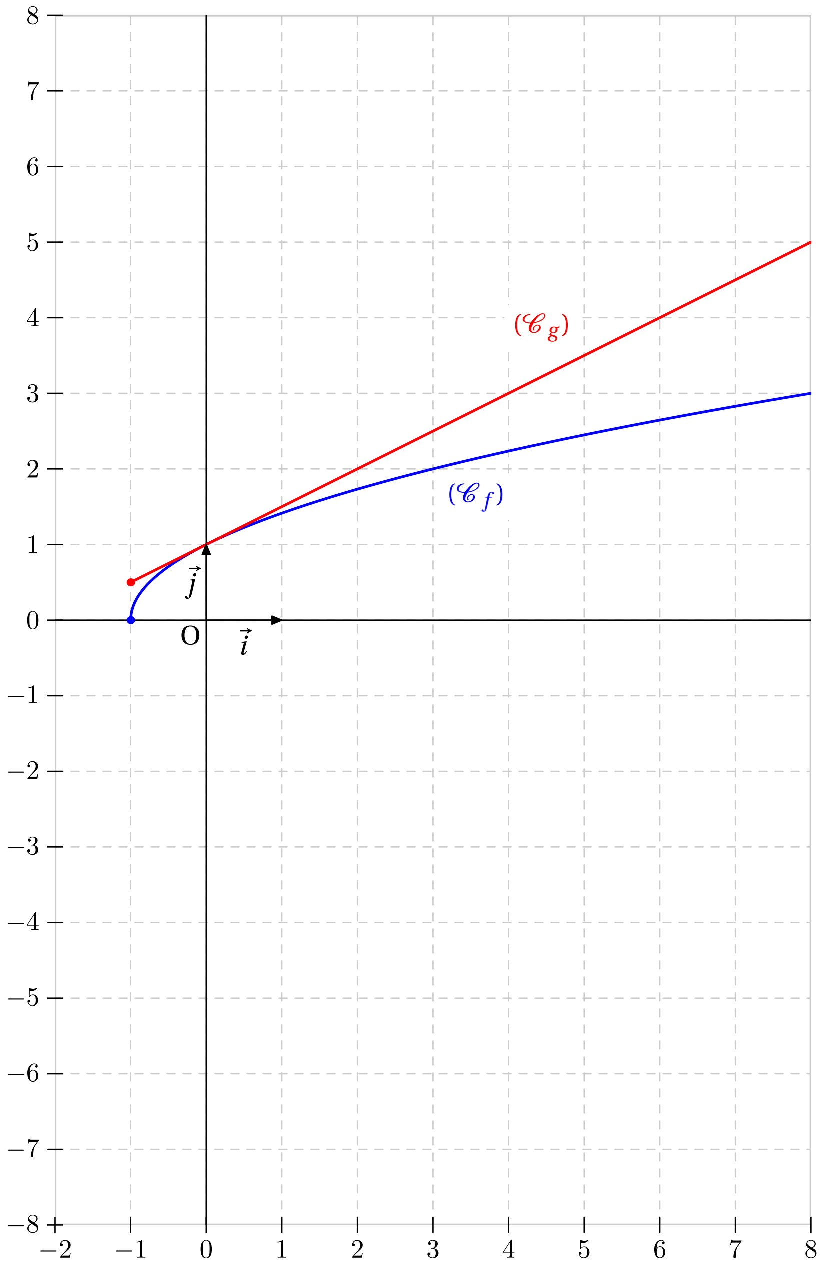
a) Montrer que $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) > 0$ pour tout $x \in [-1\ ;\ +\infty[$.

b) Calculer $(f(x))^2$ et $(g(x))^2$.

c) Démontrer que $(f(x))^2 < (f(x))^2$ pour tout $x \in [-1\ ;\ +\infty[\backslash\{0\}$.

d) Conclure.

Illustration



Exercice 18

Soient a et b dans $\mathbb{R}^*$.

1) Développer $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$.

2) Démontrer que : $\sqrt{a}-\sqrt{b} \geqslant \sqrt{a+b}$.

Exercice 19

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 1 \text{ et } g(x) = 4x^3 - 3x.$$

Démontrer que $f \circ g = g \circ f$.

Exercice 20

Soit la fonction f définie par :

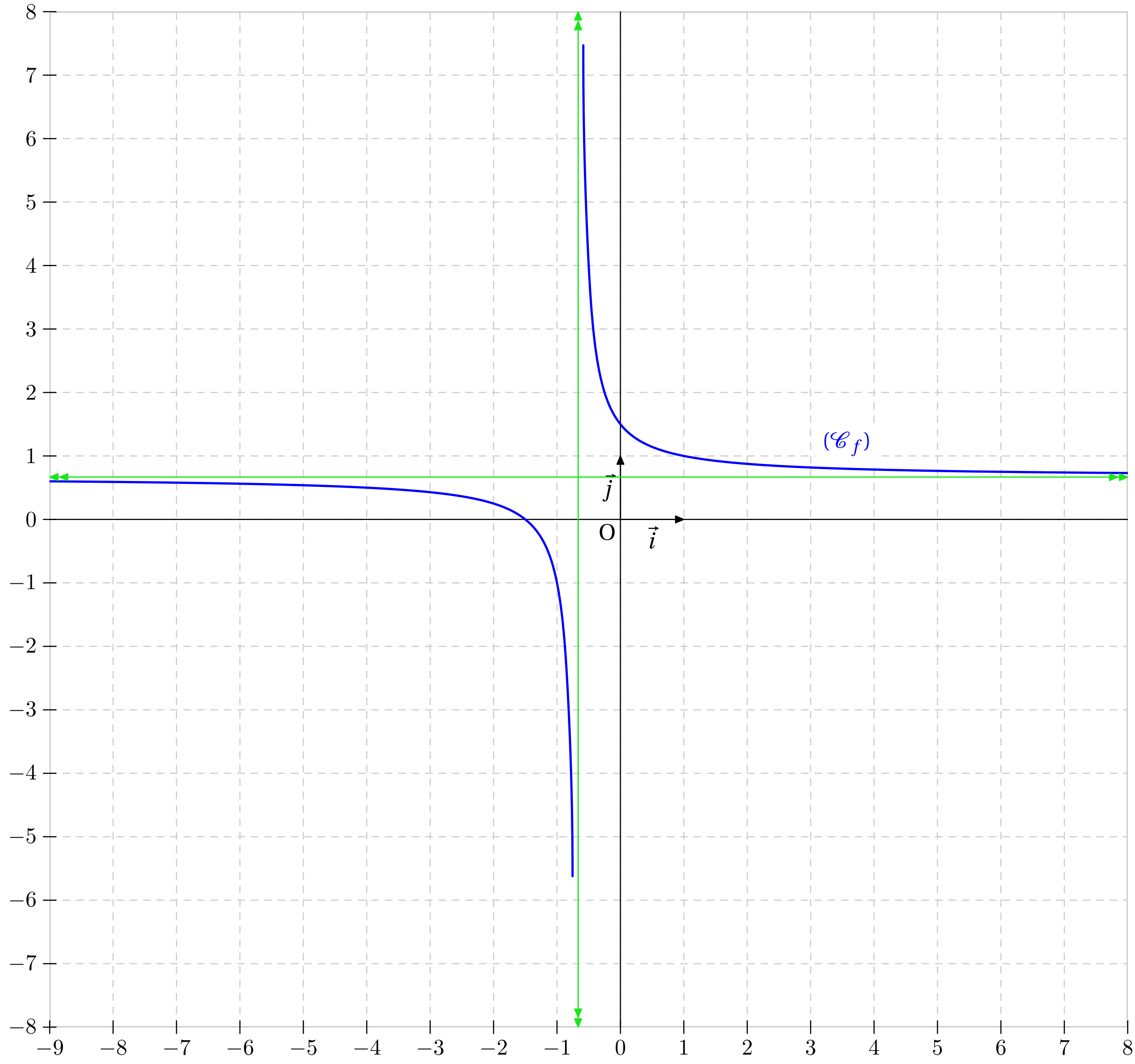
$$f(x) = \frac{2x+3}{3x+2}$$

1) Etudier les limites de f. Interpréter graphiquement.

2) Etudier les variations de f. Donner le tableau de variations complet.

3) Déterminer les éventuelles intersections de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.

Illustration



Exercice 21

Soit la fonction f définie par :

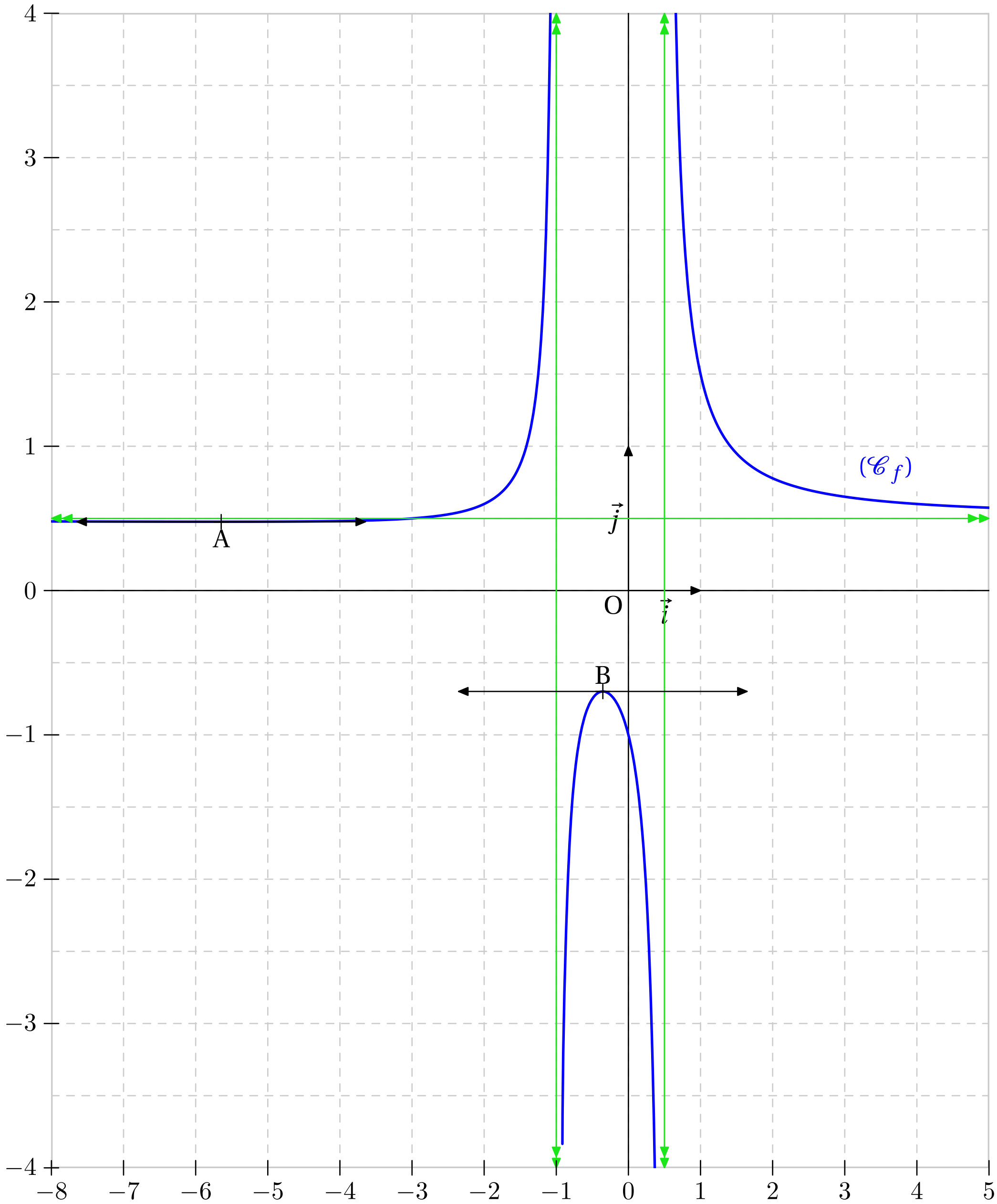
$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + x - 1}$$

1) Etudier les limites de f. Interpréter graphiquement.

2) Etudier les variations de f. Donner le tableau de variations complet.

3) Déterminer les éventuelles intersections de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.

Illustration



Exercice 22

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$$

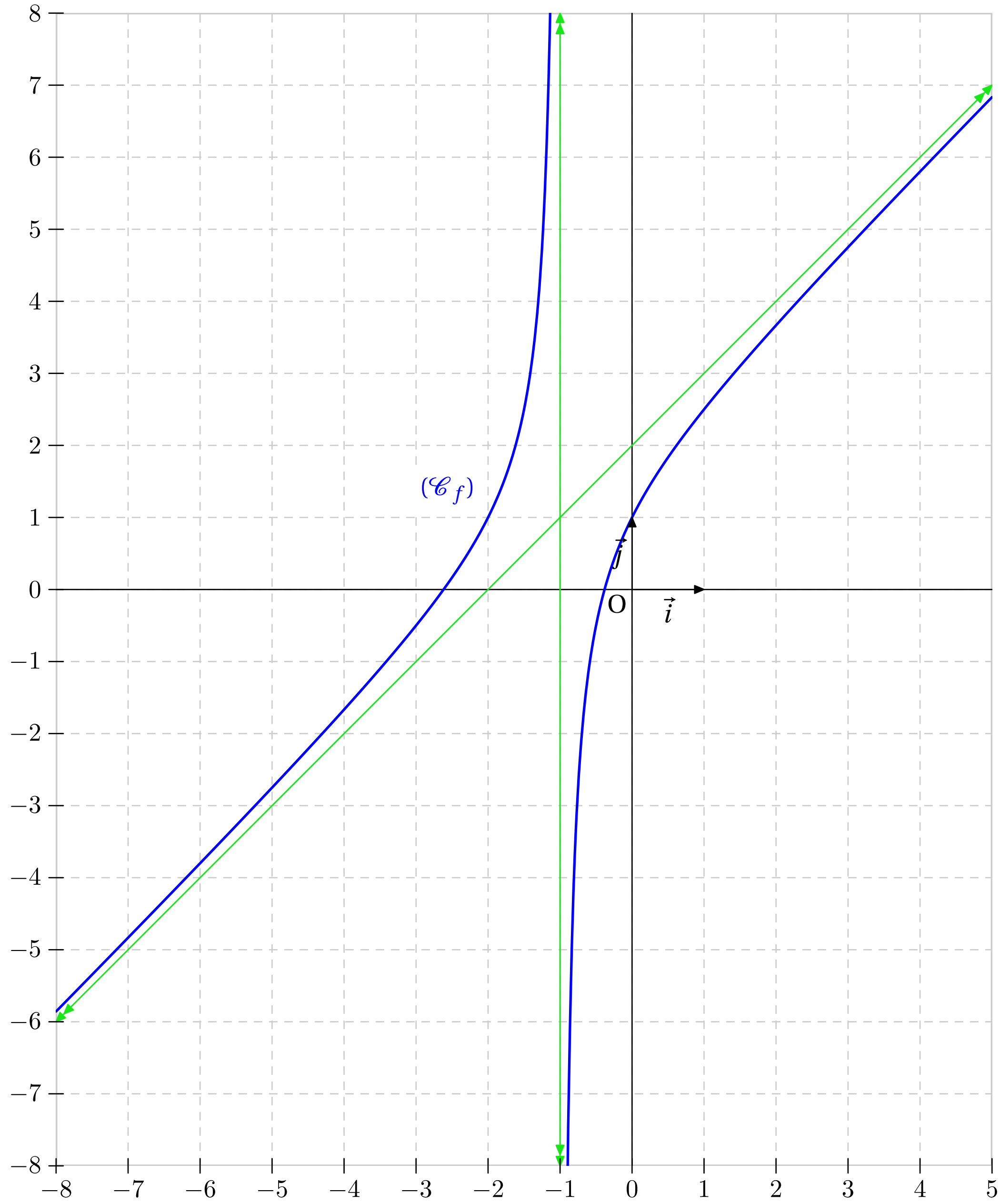
1) Etudier les limites de f. Interpréter graphiquement.

2) Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

3) Etudier les variations de f. Donner le tableau de variations complet.

4) Déterminer les éventuelles intersections de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.

Illustration



Exercice 23

On considère les fonctions suivantes :
$k : x \longmapsto x^2 \quad r : x \longmapsto \sqrt{x} \quad v : x \longmapsto \dfrac{1}{x} \quad p : x \longmapsto -x^2 \quad g : x \longmapsto x-2$
Donner pour chacune des fonctions suivantes une formule algébrique et l'ensemble de définition.

1) $r \circ g$;

2) $p \circ r$;

3) $v \circ g$;

4) $k \circ r$;

5) $k \circ k$;

6) $k \circ g$.

Exercice 24

Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

x	-8		1		8
$f(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	

On donne $f(-2) = -1$ et $f(2) = 0$.

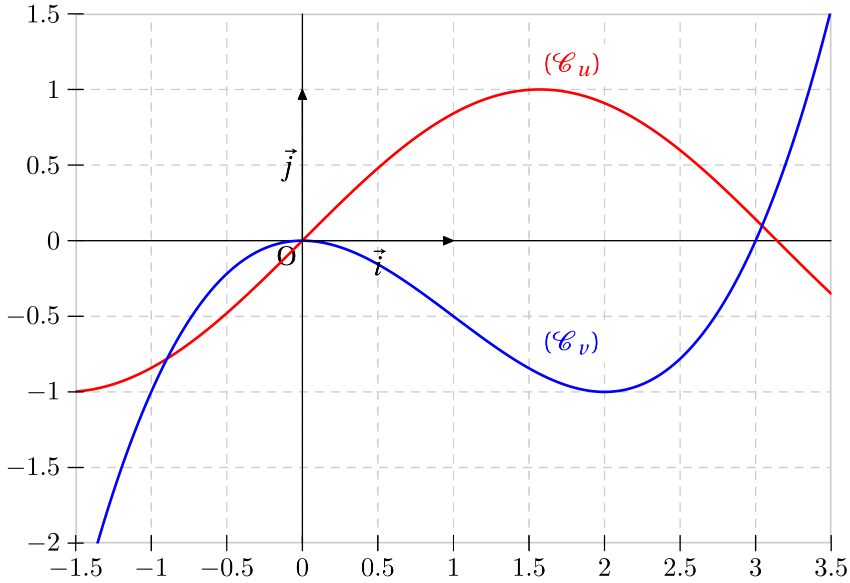
On définit les fonctions suivantes :
$h : x \longmapsto f(x) + 2 \quad r : x \longmapsto f(x+2) \quad p : x \longmapsto f(2x) \quad g : x \longmapsto 2f(x)$

1) Donner les valeurs de $g(1)$, $h(2)$, $p(1)$ et $r(-1)$.

2) Etablir les tableaux de variations de h, r, p et g.

Exercice 25

u et v sont représentées ci-dessous. Tracer sur ce graphique la courbe représentative de la fonction $u+v$.



Exercice 26

On donne trois expressions de l'image $f(x)$ d'un réel x différent de 3 par une fonction f :

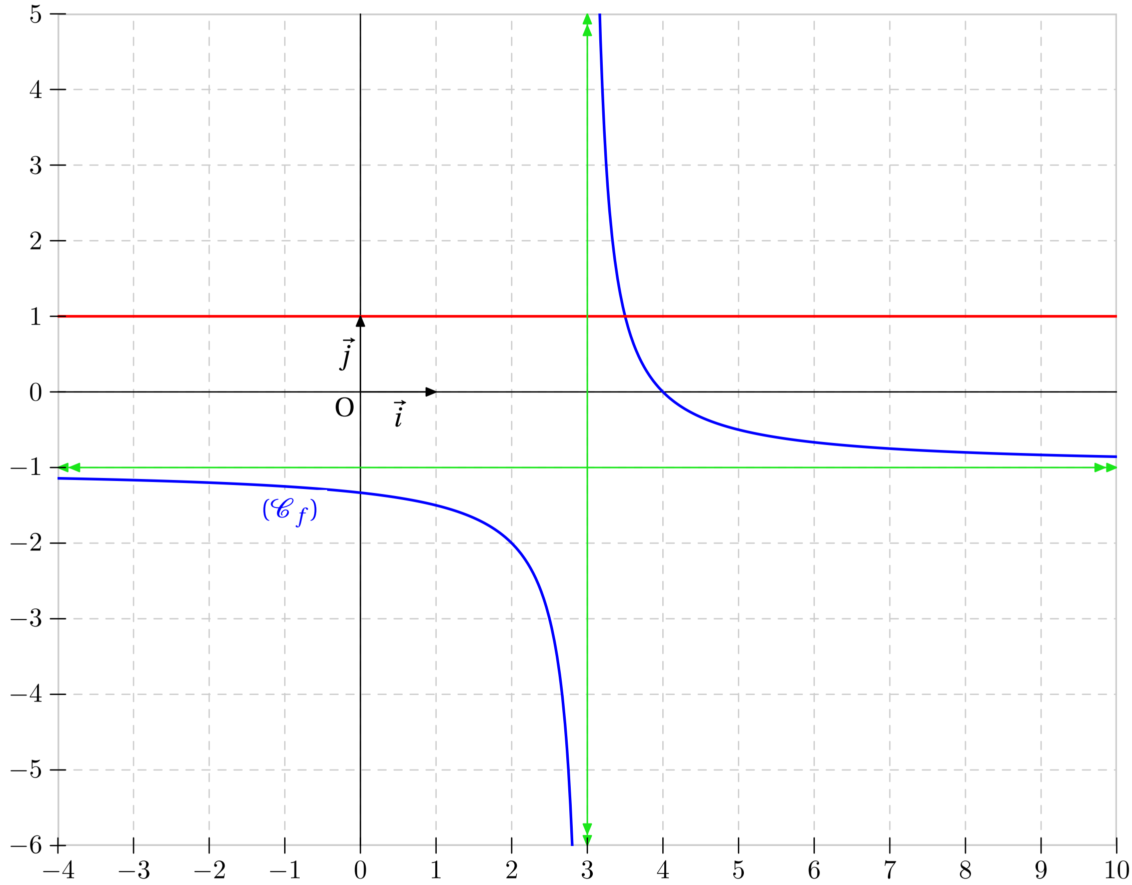
$$f_1(x) = 1 + \frac{7-2x}{x-3} \qquad f_2(x) = \frac{4-x}{x-3} \qquad f_3(x) = -1 + \frac{1}{x-3}$$

1) Vérifier que ces trois expressions sont égales.

2) Dans chacun des cas suivants, choisir l'expression la mieux adaptée et répondre à la question.

- **a)** Etudier les variations de la fonction f.
- **b)** Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
- **c)** Pour quelles valeurs de x la courbe $(\mathcal{C}_f)$ représentative de f est-elle au dessus de la droite d'équation $y = 1$.

Illustration



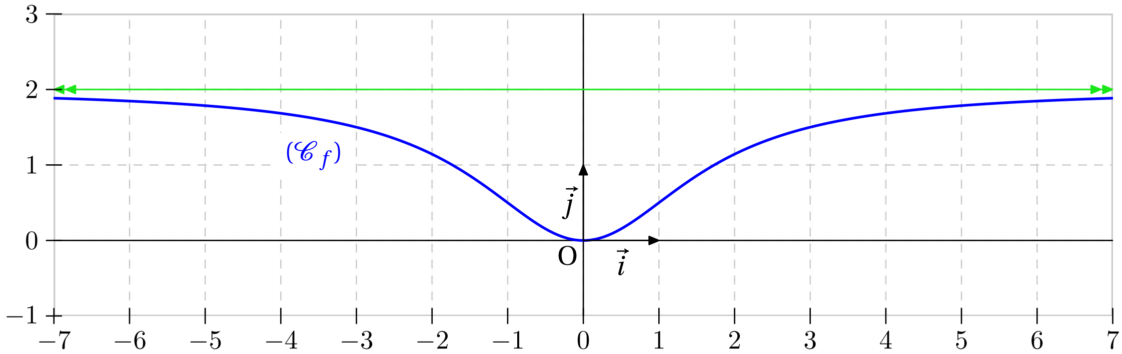
Exercice 27

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+3}$.

1) Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{x^2+3}$.

2) Montrer que f est majorée par 2.

Illustration



Exercice 28

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x+1}{x}.$$

1) Calculer $g \circ f(x)$.

2) Quel est l'ensemble de définition de $g \circ f$?

Exercice 29

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x + 4$.
$(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative de f.

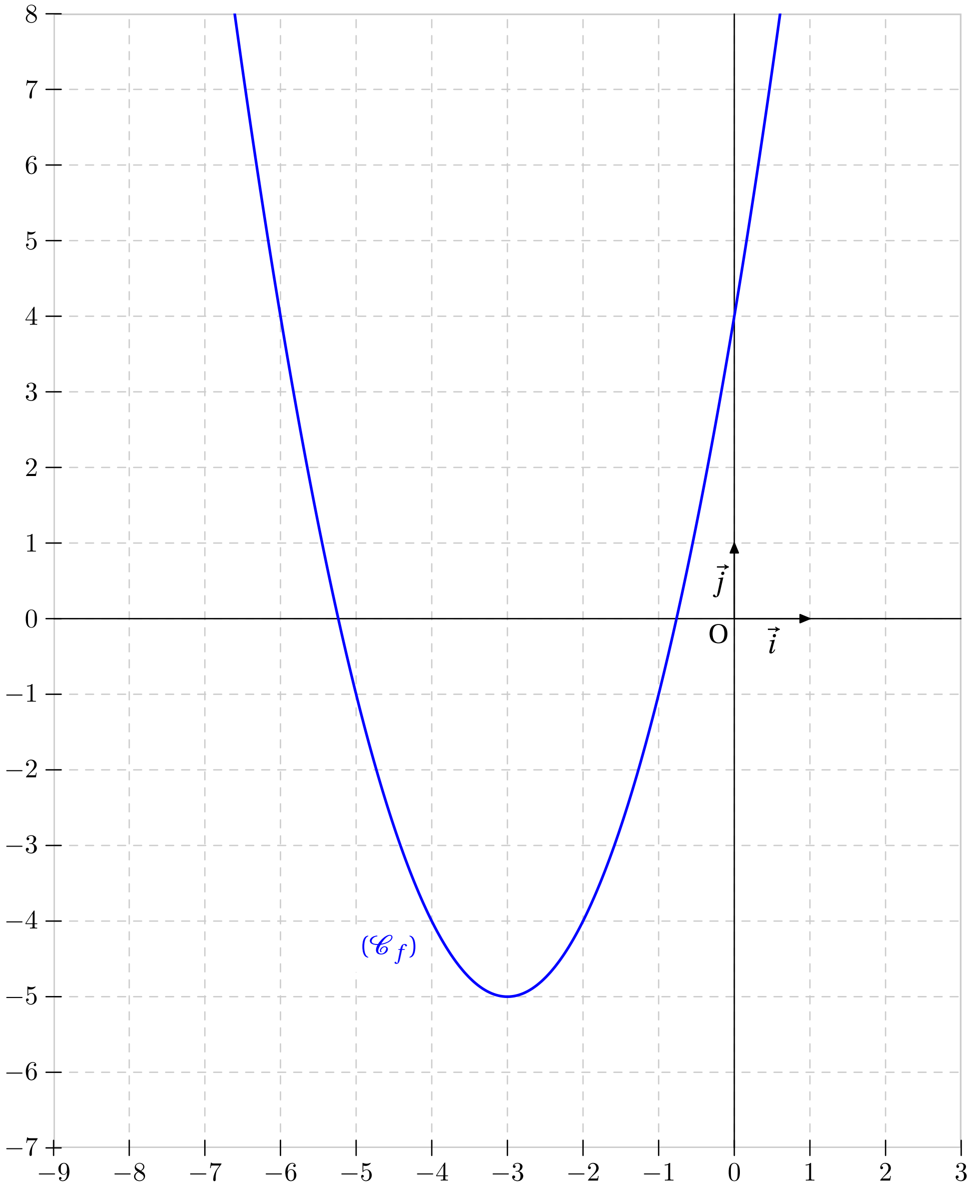
1) Vérifier que $f(x) = (x+3)^2 - 5$.

2) Donner la transformation qui permet d'obtenir la courbe $(\mathcal{C}_f)$ à partir d'une courbe connue.

3) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

4) Par un procédé analogue, déterminer le tableau de variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2 - 8x + 3$.

Illustration



Exercice 30

Soit la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{x^2 - 11x + 28}{3 - x}.$$
Dans le plan muni d'un repère $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$, on note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentant f.

1) **a)** Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.

b) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

c) Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$?

d) Montrer que, pour tout réel x de $\mathcal{D}_f$,
$$f(x) = 8 - x + \frac{4}{3 - x}.$$

e) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 8 - x$ est asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en l'infini.

f) Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Δ).

2) **a)** Montrer que, pour tout réel x de $\mathcal{D}_f$,
$$f'(x) = \frac{-x^2 + 6x - 5}{(3 - x)^2}.$$

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition.
On veillera notamment à y faire apparaître les limites précédemment obtenues.

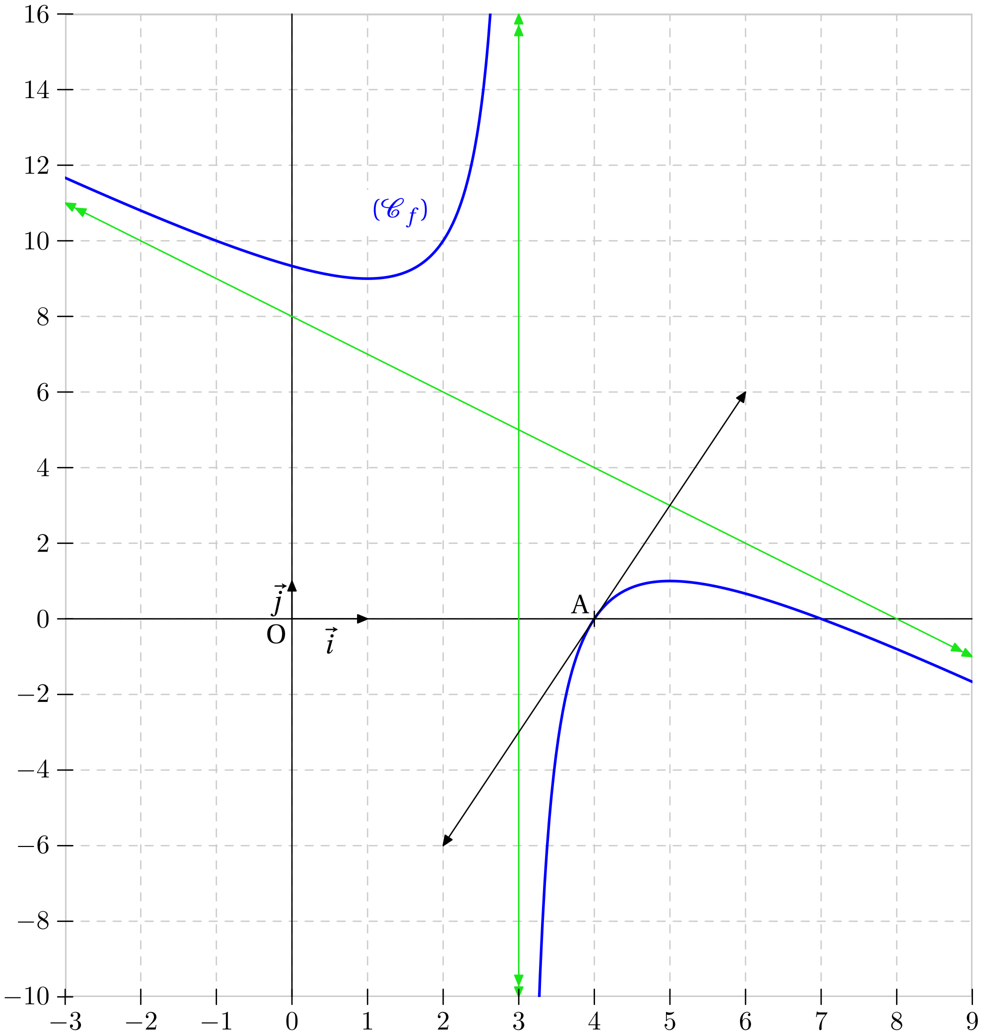
3) **a)** Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et de l'axe des abscisses.

b) Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et de l'axe des ordonnées.

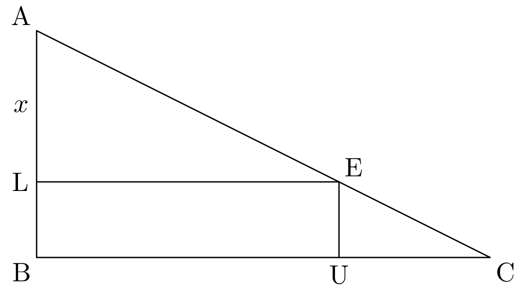
4) **a)** Déterminer l'approximation affine locale de $f(x)$ pour x voisin de 4.

b) Donner une valeur approchée de $f(3,9)$.

Illustration



Exercice 31



Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $AB = 6$ et $BC = 12$.
E étant un point du segment $[AC]$, on considère ses projetés orthogonaux L et U respectivement sur les segments $[AB]$ et $[BC]$ définissant un rectangle $BLEU$.
On pose $AL = x$.

1) **a)** Prouver que : $\dfrac{AL}{AB} = \dfrac{BU}{BC}$.

b) Calculer l'aire, en fonction de x du rectangle $BLEU$ puis montrer qu'elle peut s'écrire :

$$f(x) = 18 - 2(x-3)^2.$$

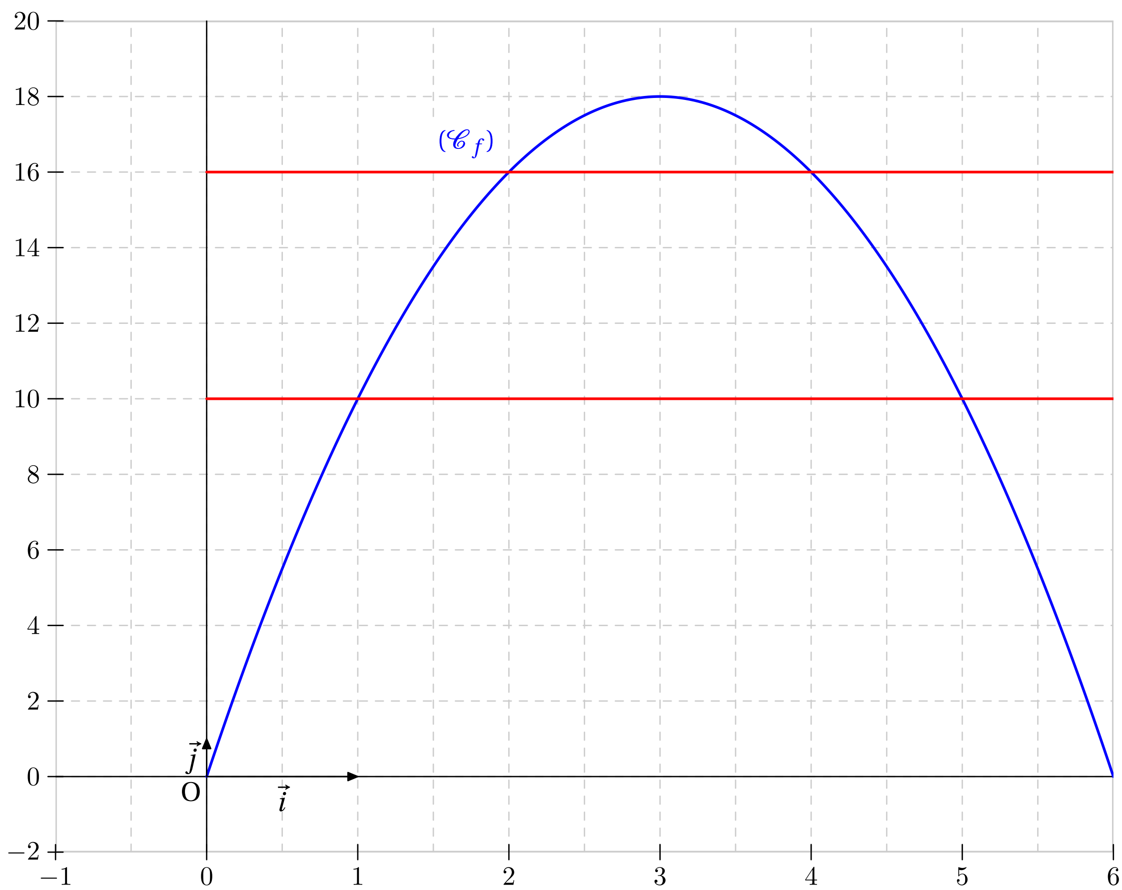
2) Donner la représentation graphique de la fonction f dans un plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j})$. On rappelle que la fonction est définie sur $[0\,;\,6]$.

3) A l'aide de la représentation graphique, faire une conjecture sur les variations de f puis la prouver.

4) Par le calcul, déterminer les distances AL correspondant à une aire de 10.

5) Résoudre, à l'aide d'un tableau de signes, l'inéquation $f(x) > 16$.

Illustration



Exercice 32

On considère la fonction f définie par $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2 - 2x + 2}$.
On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

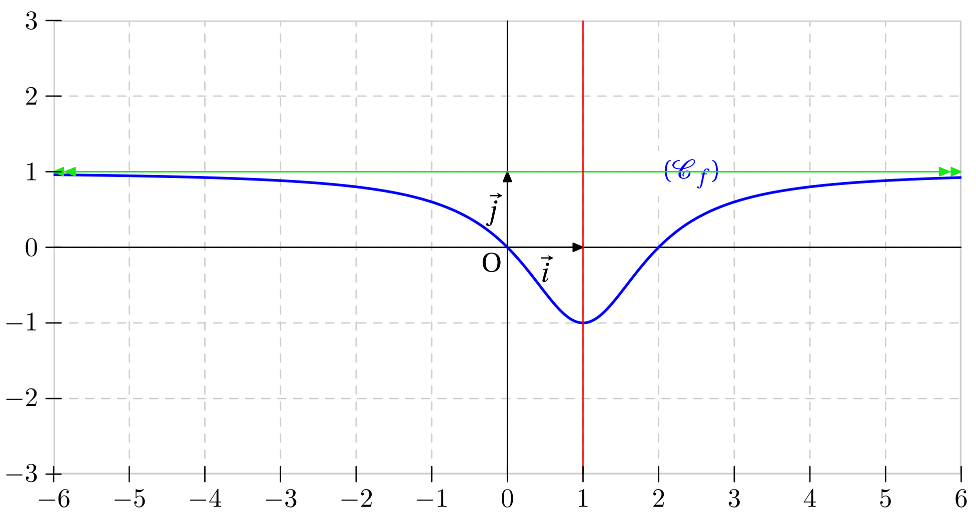
1) Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que la droite (D) d'équation $x = 1$ est axe de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$.

3) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

4) Montrer que pour tout réel x, on a $\quad -1 \leqslant f(x) < 1$.

Illustration



Exercice 33

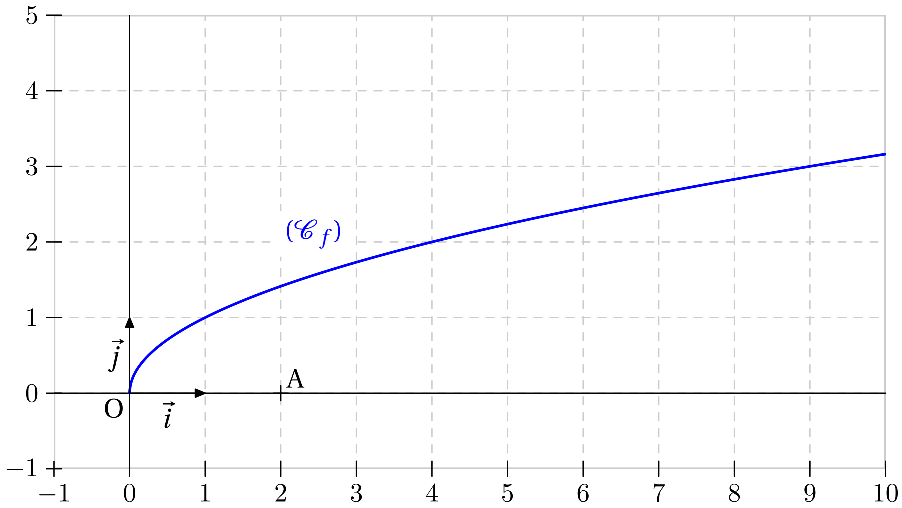
Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction racine carrée.
A est le point de coordonnées $(2\ ;\ 0)$.
Pour x positif, on note $M(x\ ;\ \sqrt{x})$ le point d'abscisse x.

1) Exprimer en fonction de x la valeur AM^2. On pourra la noter $d(x)$.

2) Quel est le point de $(\mathcal{C}_f)$ qui est le plus près de A.

Indication : étudier les variations de la fonction d.

Illustration

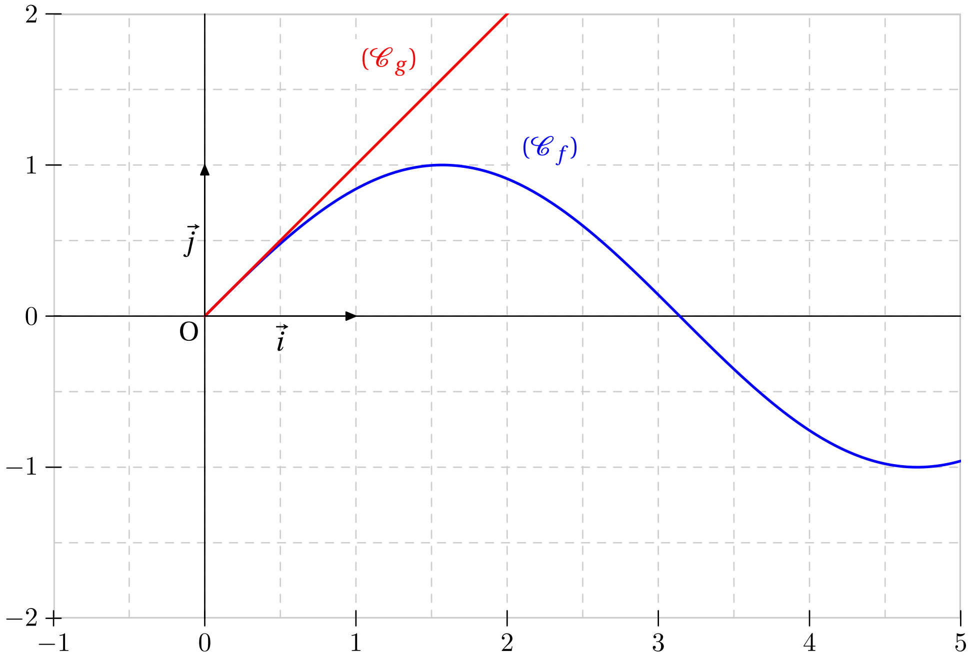


Exercice 34

Montrer que pour tout x positif, on a $\sin x \leqslant x$.

Indication : étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = x - \sin x$.

Illustration



Exercice 35

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ -2[\cup]-2\ ;\ 2[\cup]2\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 12}{4 - x^2}.$$

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer les limites de f en -2 et en 2.
Quelle conséquence graphique en tire-t-on pour $(\mathcal{C}_f)$?

2) **a)** Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Déterminer les réels a, b, c et d tels que, pour tout x différent de -2 et 2,

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{4 - x^2}.$$

c) En déduire que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = 3 - x$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$.

d) Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à $(\mathcal{D})$.

3) **a)** Calculer $f'(x)$ et prouver que $f'(x)$ a le même signe que $12 - x^2$.

b) En déduire les variations de f et desser le tableau de variations de f.

4) **a)** Déterminer les coordonnées I, point d'intersection de $(\mathcal{D})$ et de l'axe des ordonnées.

b) Démontrer que I est le centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

c) Déterminer l'équation de la tangente (Δ) à $(\mathcal{C}_f)$ au point I.

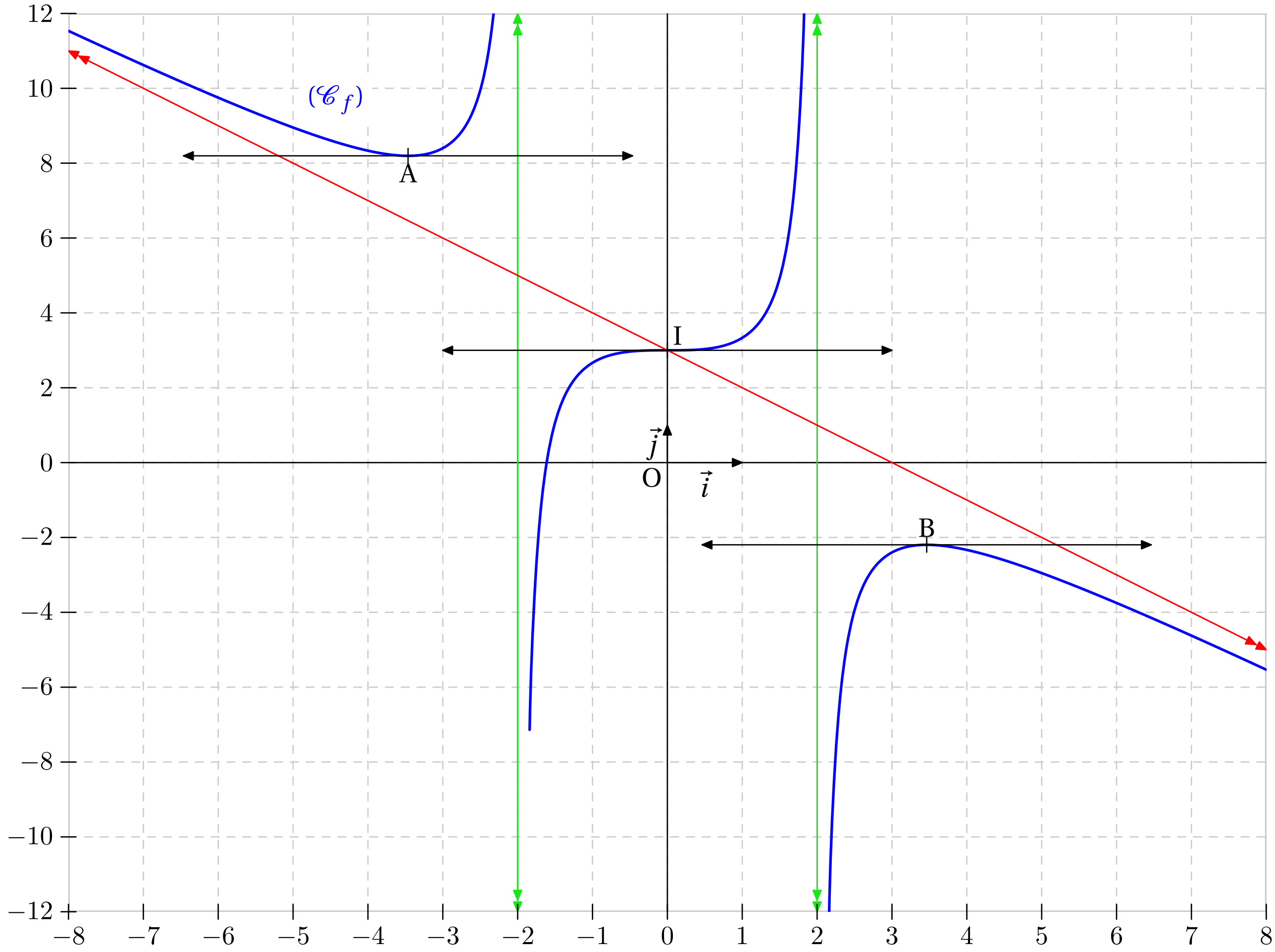
d) Etudier la postion relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Δ).

5) Construire $(\mathcal{C}_f)$, ses asymptotes ainsi que les tangentes horizontales.

6) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ où k est un réel fixé. On discutera suivant les valeurs de k.

7) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = ax + 3$ où a est un réel fixé. On discutera suivant les valeurs de a.

Illustration



Exercice 36

f est la fonction définie sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}.$$

$(\mathcal{C}_f)$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j})$.

1) **a)** En écrivant $f(x) = 1 - \dfrac{x+2}{x^2}$, trouver la limite de f à droite et à gauche de 0.

b) Quelles sont les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) Démontrer que $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en deux points A et B dont vous préciserez les coordonnées.

3) **a)** Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

b) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

4) Sur la même figure que la courbe $(\mathcal{C}_f)$, construire la courbe représentative $(\mathcal{C}_h)$ de la fonction h définie sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par

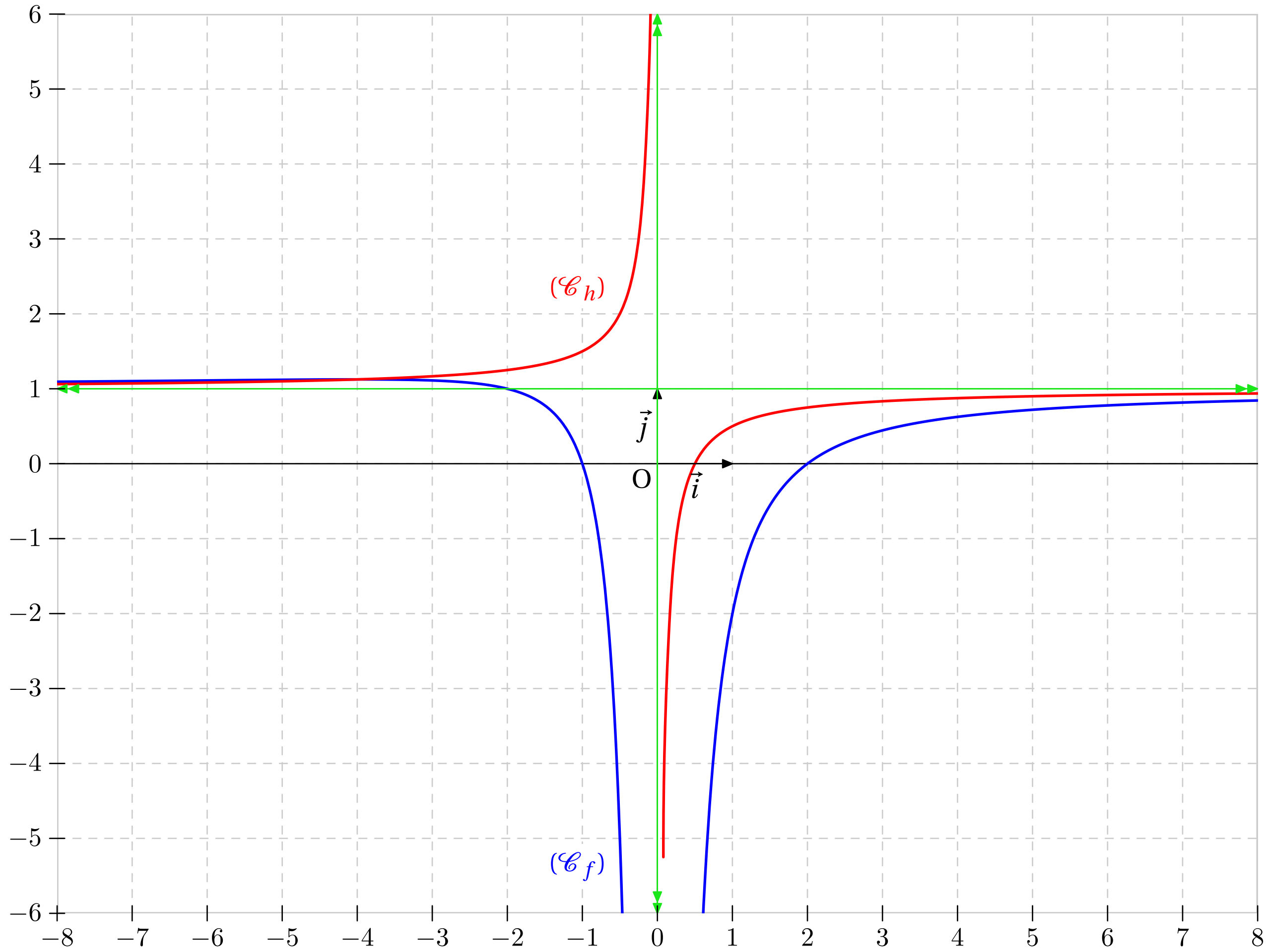
$$h(x) = 1 - \frac{1}{2x}.$$

5) **a)** Discuter suivant les valeurs de m du nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

b) Lorsque la droite d'équation $y = m$ coupe $(\mathcal{C}_f)$ en deux points M et N distincts, calculer en fonction de m les coordonnés du milieu de $[MN]$.

c) Prouver que I est un point de $(\mathcal{C}_h)$.

Illustration



Exercice 37

1) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (4x-1)^2 - 9$$

peut s'écrire comme le produit de deux fonctions affines.

2) Montrer que tout $x \neq -1$, la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x+1)^2}$$

peut s'écrire comme le quotient de deux fonctions affines.

Exercice 38

On donne : $f(x) = -3x + 1$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

On définit la fonction h définie sur $I = \left]-\infty \,;\, \dfrac{1}{3}\right[$ par $h = g \circ f$.

1) Donner l'expression de $h(x)$.

2) Déterminer le sens de variations de h sur I.

Exercice 39

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{4x-1}$ sur $I = \left[\frac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$.

En considérant la fonction f comme la composée de fonctions de référence, préciser le sens de variations de f sur l'intervalle I.

Exercice 40

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 6x + 4.$$

$(\mathcal{C}_f)$ est sa courbe représentative.

1) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = (x+3)^2 - 5$.

2) Donner la transformation qui permet d'obtenir la courbe $(\mathcal{C}_f)$ à partir de la parabole $(\mathcal{P})$ représentative de la fonction carrée.

3) Tracer $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{C}_f)$ dans un même repère.

4) Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 41

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathcal{D}_f =]-\infty\ ;\ -3[\cup]-3\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-2x-5}{x+3}.$$

$(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative de f.

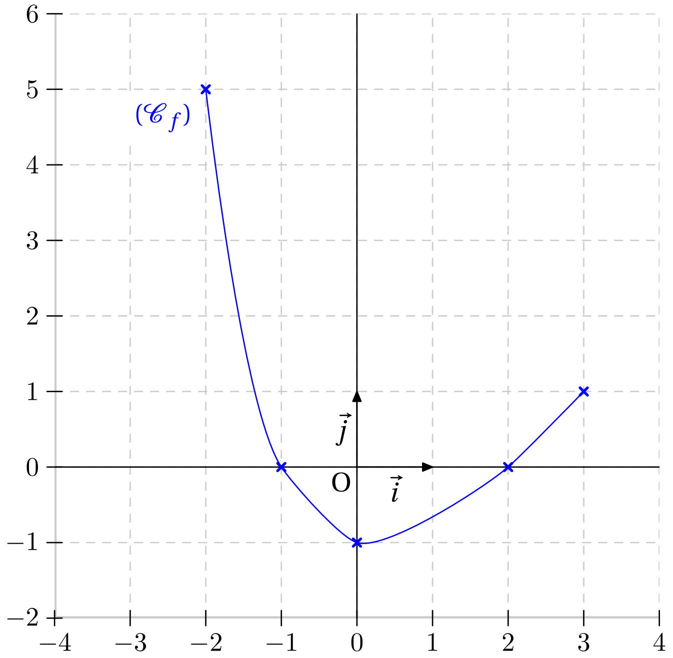
1) Déterminer les réels a et b tels que :

$$f(x) = a + \frac{1}{x+b}.$$

2) Donner la transformation qui permet d'obtenir la courbe $(\mathcal{C}_f)$ à partir de l'hyperbole représentative de la fonction inverse.

Exercice 42

Sur le graphique ci-dessous, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$.



1) Donner le tableau de variations de la fonction f.

2) Donner l'ensemble de définition de la fonction $\dfrac{1}{f}$ et donner son tableau de variation.

3) Donner l'ensemble de définition de la fonction f^2 et donner son tableau de variation.

Exercice 43

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x+1}{x+1}}$ sur $[0\ ;\ 1]$.

Déterminer un encadrement $f(x)$ sur $[0\ ;\ 1]$. On expliquera son raisonnement.

Exercice 44

1) On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x}$.

a) Calculer $g \circ f(x)$.

b) Quel est l'ensemble de définition de $g \circ f$?

2) A l'aide des fonctions composées, déterminer le sens de variation de la fonction h définie par $h(x) = -\dfrac{5}{x-2} + 4$ sur l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$.

Exercice 45

Soit la fonction u définie sur $[-5\ ;\ 3]$ qui a pour tableau de variations :

x	-5		-2		1		3
$u(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

1) Soit la fonction v définie par $v(x) = -2x + 3$. Donner le tableau de variation de la fonction $f = v \circ u$ sur $[-5\ ;\ 3]$. On expliquera le sens de variation de f sur l'intervalle $[-5\ ;\ -2]$.

2) Donner le tableau de variations de la fonction $g = u^2$ sur $[-5\ ;\ 3]$. On expliquera le sens de variation de g sur l'intervalle $[-5\ ;\ -2]$.
On donne : $u(0) = 0$ et $u(2) = 0$.

Exercice 46

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{3x+5}{x+2}$.

1) Calculer $f(x) - 3$.

2) En déduire deux réels a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{x+2}$.

3) Soit $(\mathcal{C}_g)$ la courbe représentative de la fonction $g(x) = -\dfrac{1}{x}$.
Comment peut-on tracer $(\mathcal{C}_f)$ à partir de $(\mathcal{C}_g)$?

4) Donner le tableau de variations de f.

Exercice 47

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ par $f(x)=\dfrac{x}{2x-1}$.

1) Calculer $f(x)-\dfrac{1}{2}$.

2) En déduire deux réels a et b tels que $f(x)=a+\dfrac{b}{2x-1}$ pour tout $n\neq\dfrac{1}{2}$.

3) Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

Exercice 48

La fonction f est définie sur $[-2\ ;\ 3]$ et strictement monotone sur les intervalles $[-2\ ;\ 0]$ et $[0\ ;\ 3]$.
De plus, elle admet un minimum égal à -2 et vérifie :
$f(-2) = 3$, $f(-1) = 0$ et $f(3) = 0$.

Déterminer le tableau de variations de $f \circ f$.

Exercice 49

Soit la fonction f définie par $f(x) = -\dfrac{5}{x+1} + 4$.

1) Donner son ensemble de définition.

2) Déterminer son sens de variation sur $]-1\ ;\ +\infty[$.

3) Donner son tableau de variations complet.

Exercice 50