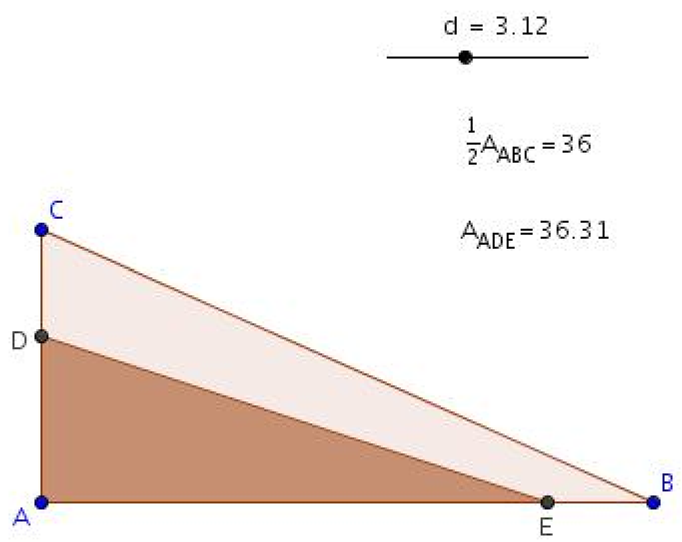
Exercice 1

Dans un triangle ABC rectangle en A, on place les points D et E respectivement sur $[AC]$ et $[AB]$ tels que $AD = BE = x$.

Déterminer x pour que l'aire du triangle ADE soit égale à la moitié de celle du triangle ABC.

On donne : $AB = 18\ m$ et $AC = 8\ m$.

Illustration



Exercice 2

Peut-on trouver trois carrés ayant pour côtés des entiers consécutifs et dont la somme des aires soit égale à $15\,125$? Si oui, préciser quelles valeurs doivent avoir les côtés.

Même question avec $15\,127$.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^2 = 9$.

2) $x^2 = -3$.

3) $(x-5)^2 = 3$.

4) $(2x-1)^2 + x(1-2x) = 4x^2 - 1$.

5) $(3x+5)^2 = (x+1)^2$.

6) $(5x-4)^2 - (3x+7)^2 = 0$.

Exercice 4

Sur un drapeau rectangulaire de longueur $4\ m$ et de largeur $3\ m$, on trouve une croix d'épaisseur $x\ m$.

Quelle valeur doit-on donner à la largeur de la croix pour que son aire soit égale à la moitié du drapeau ?

Exercice 5

1) Résoudre les équations suivantes :

a) $x^2 = \dfrac{1}{2}$;

b) $x^2 = \dfrac{1}{3}$.

2) Résoudre l'équation suivante : $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$. On pourra poser $X = x^2$.

Exercice 6

Résoudre les inéquations suivantes :

$-2x^2 + 7x - 5 \leqslant 0$ $\quad (x^2 + 2x + 1)^2 < 16$ $\quad \dfrac{3x^2 + x + 1}{x^2 - 3x - 10} > 0.$

Exercice 7

1) On dispose d'une baguette de bois de $10\ cm$ de long.
Où briser la baguette pour que les morceaux obtenus soient deux côtés consécutifs d'un rectangle de surface $20\ cm^2$?

2) Même question avec un rectangle d'aire $40\ cm^2$.

Exercice 8

On appelle format f d'un rectangle le quotient de la longueur L par la largeur l : $f = \dfrac{L}{l}$.

1) Quel est le format d'un rectangle de longueur $L = 5\ cm$ et de largeur $l = 2\ cm$?

2) On considère un rectangle $ABCD$ de largeur $l = 1\ cm$ et de longueur $L = x\ cm$. On prendra $1 < x < 2$.

- **a)** Exprimer en fonction de x le format f du rectangle $ABCD$.
- **b)** On découpe dans le rectangle un carré $ABOR$.
  Exprimer en fonction de x le format f' du rectangle $ORDC$.
- **c)** Quelle valeur donner à x pour que les rectangles $ABCD$ et $ORDC$ aient le même format ?
- **d)** On note ϕ cette valeur. Déterminer $\phi - 1$, $\phi(\phi - 1)$ et $\dfrac{1}{\phi}$.

Exercice 9

Pour se rendre d'une ville A à une ville B distantes de $195\ km$, deux cyclistes partent en même temps. L'un deux, dont la vitesse moyenne sur ce parcours est supérieure à $4\ km.h^{-1}$ à celle de l'autre, arrive une heure plus tôt.

Quelles sont les vitesses des deux cyclistes ?

Exercice 10

L'aire d'un triangle rectangle est $429\ m^2$, et l'hypoténuse a pour longueur $h = 72,5\ m$.

Trouver le périmètre.

Exercice 11

Résoudre les équations suivantes :

1) $4x^2 - x - 3 = 0$.

2) $(t+1)^2 + 3 = 0$.

3) $2(2x+1)^2 - (2x+1) - 6 = 0$.

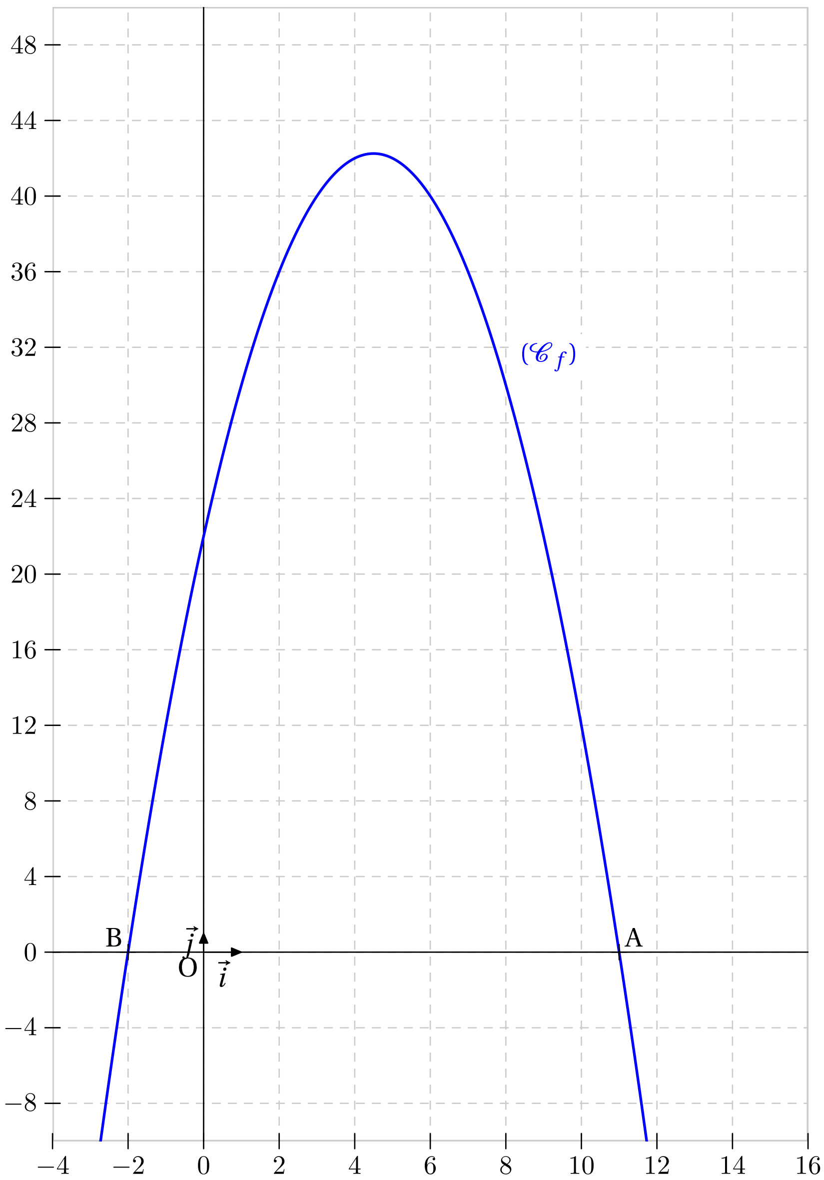
4) $x^2 + 10^{50} + 25 \times 10^{98} = 0$.

Exercice 12

Résoudre l'inéquation suivante :

$$-x^2 + 9x + 22 \geqslant 0.$$

Illustration



Exercice 13

Trouver deux nombres dont la somme est égale à 57 et le produit égal à 540.

Exercice 14

On achète pour 40 € d'essence à une station service. On s'aperçoit qu'à une autre station, le prix du litre d'essence est inférieur de $0,10$ €. On aurait pu ainsi obtenir 5 litres de plus pour le même prix.

Quel était le prix d'essence à la première station et combien de litres en avait-on pris ?

Exercice 15

Résoudre les équations suivantes :

1) $\dfrac{2x-5}{x-1} = \dfrac{x-1}{x+1}$.

2) $\dfrac{x^2-x+1}{x+2} = 2x+3$.

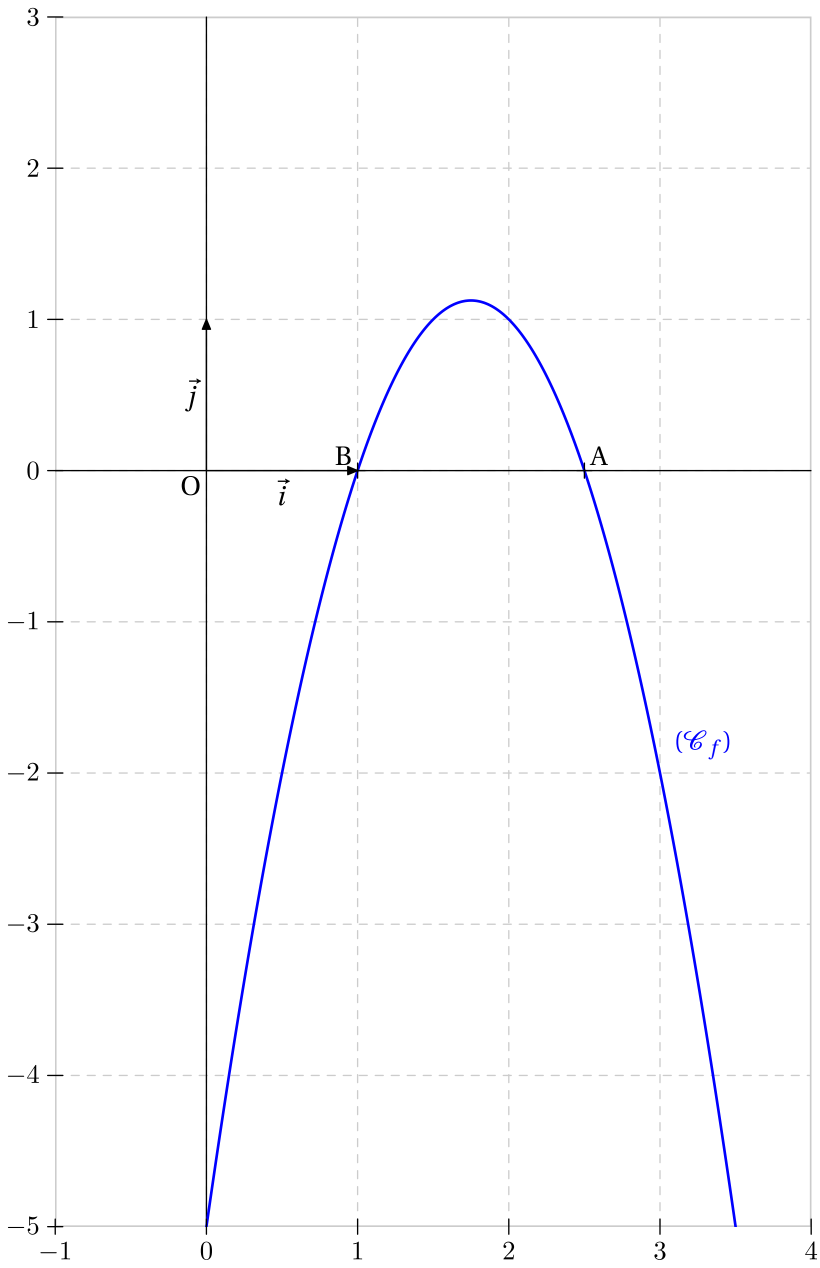
Exercice 16

1) Résoudre l'équation : $-2x^2 + 7x - 5 = 0$.

2) Factoriser l'expression : $-2x^2 + 7x - 5$.

3) Résoudre l'inéquation : $-2x^2 + 7x - 5 \leqslant 0$.

Illustration



Exercice 17

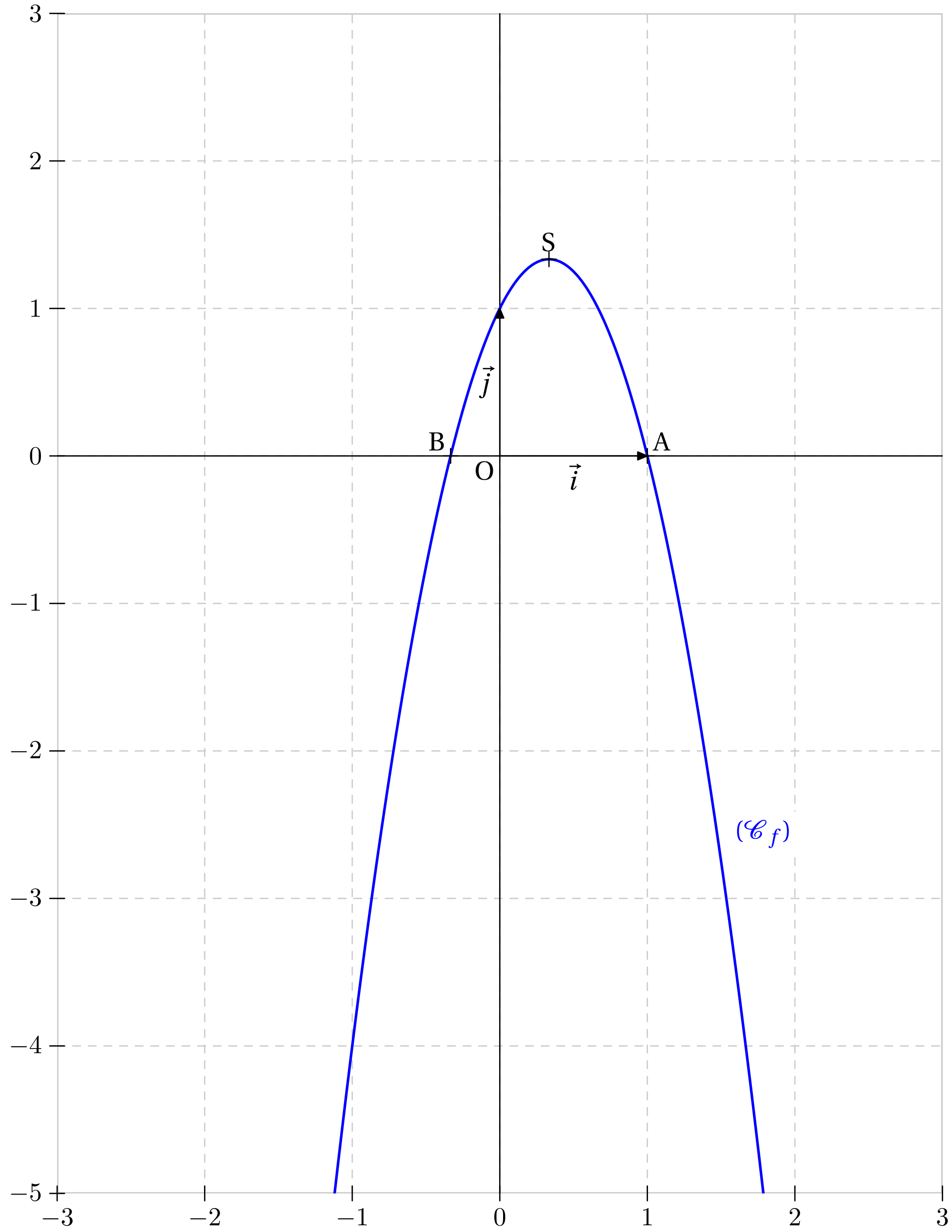
Soit f la fonction définie par $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$ pour tout réel x.
On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.

1) Préciser la nature de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et les coordonnées de son sommet S.

2) Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en deux points A et B dont on précisera les coordonnées.

3) Pour quelles valeurs de x la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est-elle située au dessus de l'axe des abscisses ?

Illustration



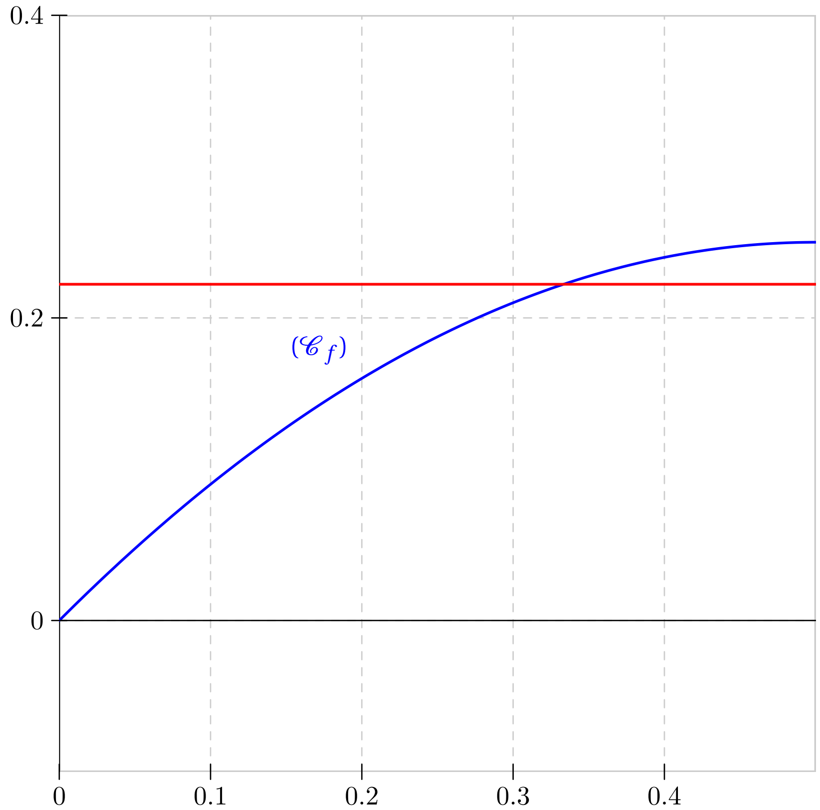
Exercice 18

$ABCD$ est un rectangle de largeur x et de longueur $1-x$. On a : $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$.

1) Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire du rectangle est-elle égale à $\frac{2}{9}$?

2) Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire du rectangle est-elle maximale ?

Illustration

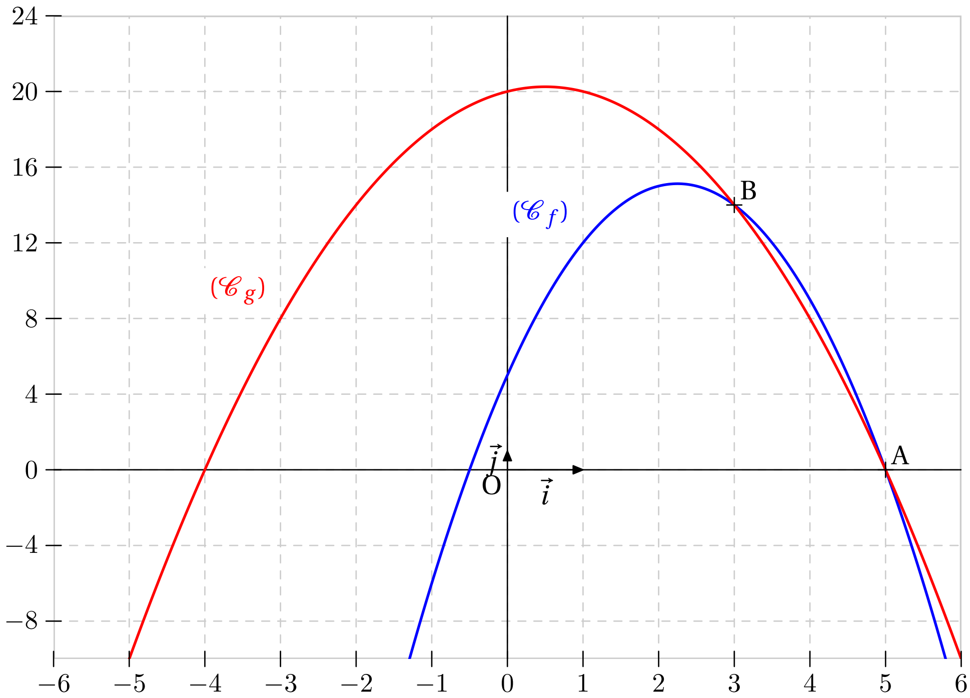


Exercice 19

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$(2x+1)(5-x) < (5-x)(x+4).$$

Illustration



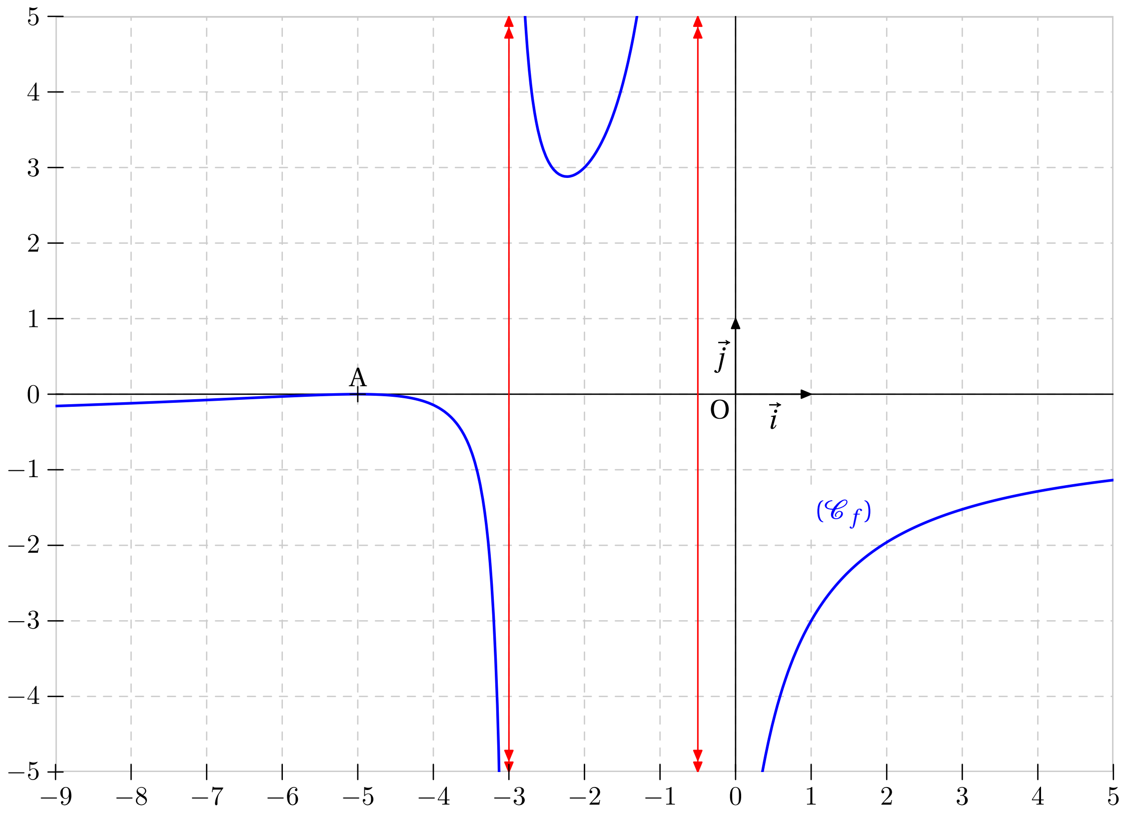
Exercice 20

1) Etudier le signe de $x^2 + 10x + 25$ et celui de $-2x^2 - 7x - 3$.

2) En déduire le signe de $\dfrac{x^2 + 10x + 25}{-2x^2 - 7x - 3}$, puis les solutions de l'inéquation :

$$\frac{x^2 + 10x + 25}{-2x^2 - 7x - 3} \leqslant 0.$$

Illustration



Exercice 21

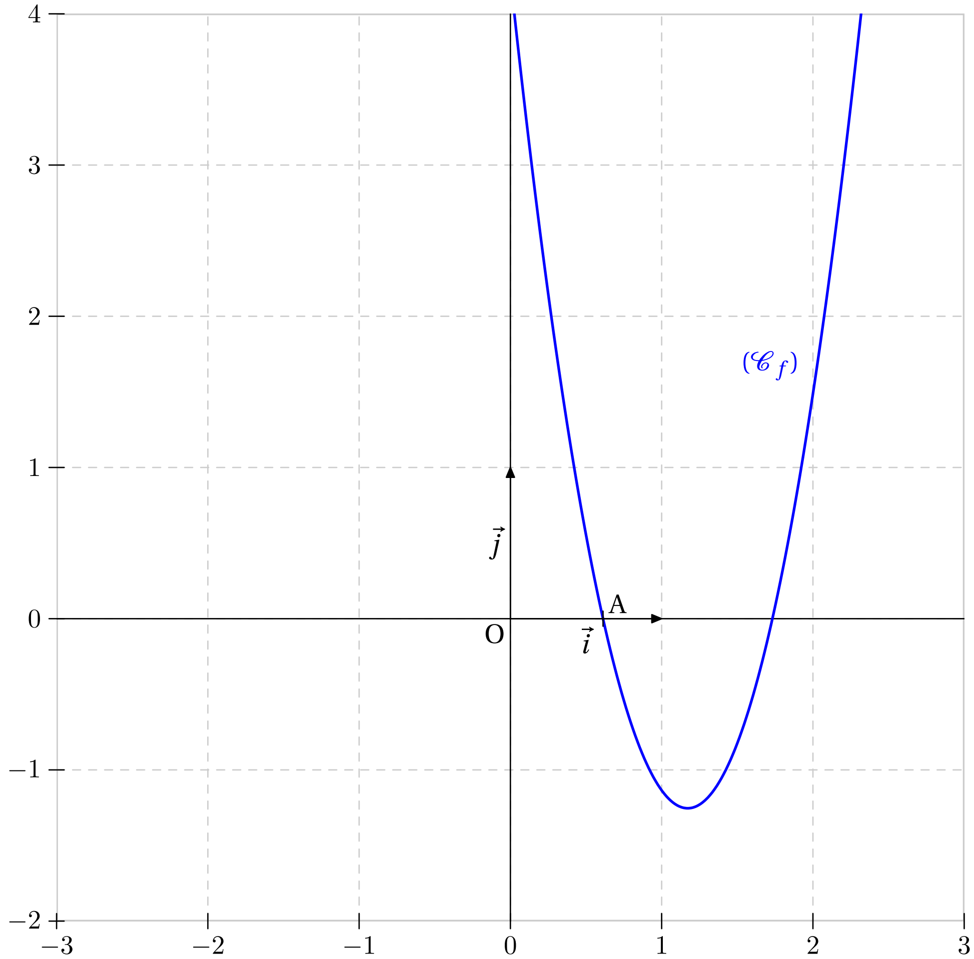
On donne le trinôme du second degré P défini par :

$$P(x) = 4x^2 - \left(\sqrt{6} + 4\sqrt{3}\right)x + \sqrt{18}.$$

1) Montrer que P admet $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ pour racine.

2) Trouver l'autre racine (en valeur exacte).

Illustration



Exercice 22

Résoudre l'équation :

$$2004\,x^2 + x - 2005 = 0.$$

PS : est-il bien raisonnable de calculer le discriminant ?

Exercice 23

Le montage en dérivation de deux résistances R_1 et R_2 a une résistance de $1,5\ k\Omega$.
Leur montage en série a une résistance de $8\ k\Omega$.

Calculer les valeurs des deux résistances.

Exercice 24

Soit P la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Démontrer que :

Si a et c sont de signes opposés, alors P admet au moins une racine réelle.

Exercice 25

Les longueurs des trois côtés d'un triangle sont trois entiers consécutifs.

Trouver ces trois longueurs.

Exercice 26

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.
On considère l'équation (E) : $ax^2 + bx - a = 0$.

1) Démontrer que (E) admet deux racines distinctes.

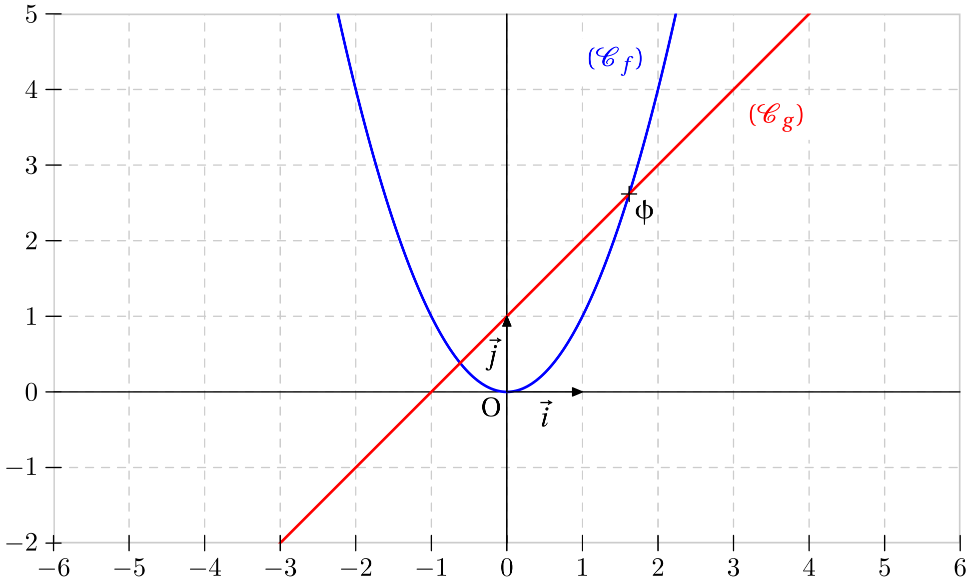
2) Démontrer que les deux racines de (E) sont de signes contraires.

Exercice 27

1) Résoudre l'équation : $x^2 = 1 + x$.
On notera ϕ sa racine positive. ϕ s'appelle le nombre d'or.

2) Que vaut $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}}$? Il y a une infinité de racines imbriquées.

Illustration



Exercice 28

Dans cet exercice, on admettra que le nombre de façons de choisir deux objets parmi n est : $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Une compagnie aérienne assure toutes les liaisons possibles entre un certain nombre de villes.
On sait qu'il y a 45 liaisons en service.

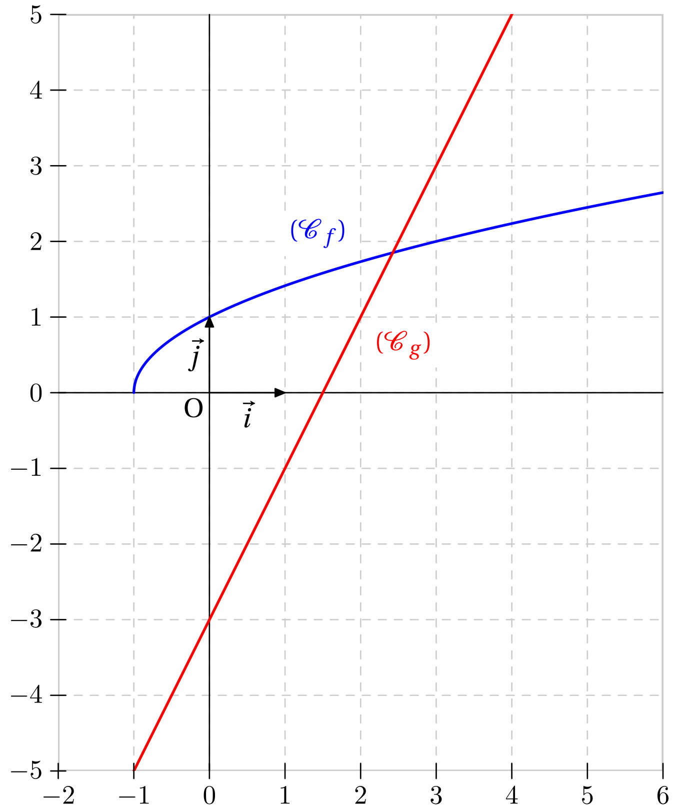
Quel est le nombre de villes desservies par cette compagnie ?

Exercice 29

Résoudre l'équation :

$$\sqrt{x+1} = 2x - 3.$$

Illustration



Exercice 30

Une parabole P admet, dans un repère $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j})$, une équation du type :

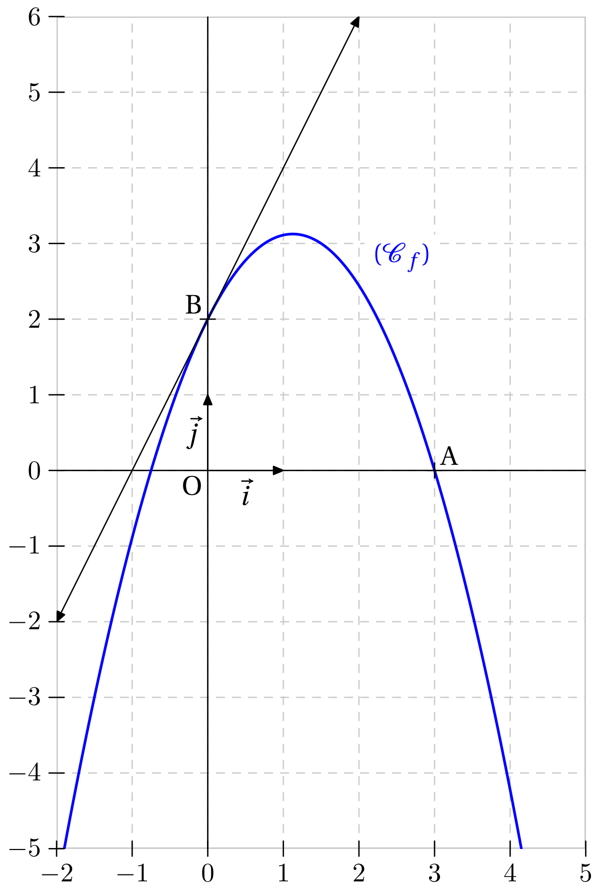
$$y = ax^2 + bx + c$$

avec $a \neq 0$.

Déterminer les coefficients a,b et c sachant que P coupe l'axe des abscisses (Ox) au point A d'abscisse 3, l'axe des ordonnées (Oy) au point B d'ordonnée 2 et qu'elle admet en ce point la droite d'équation $y = 2x+2$ pour tangente.

Indiquer l'abscisse du second point d'intersection de P avec (Ox).

Illustration

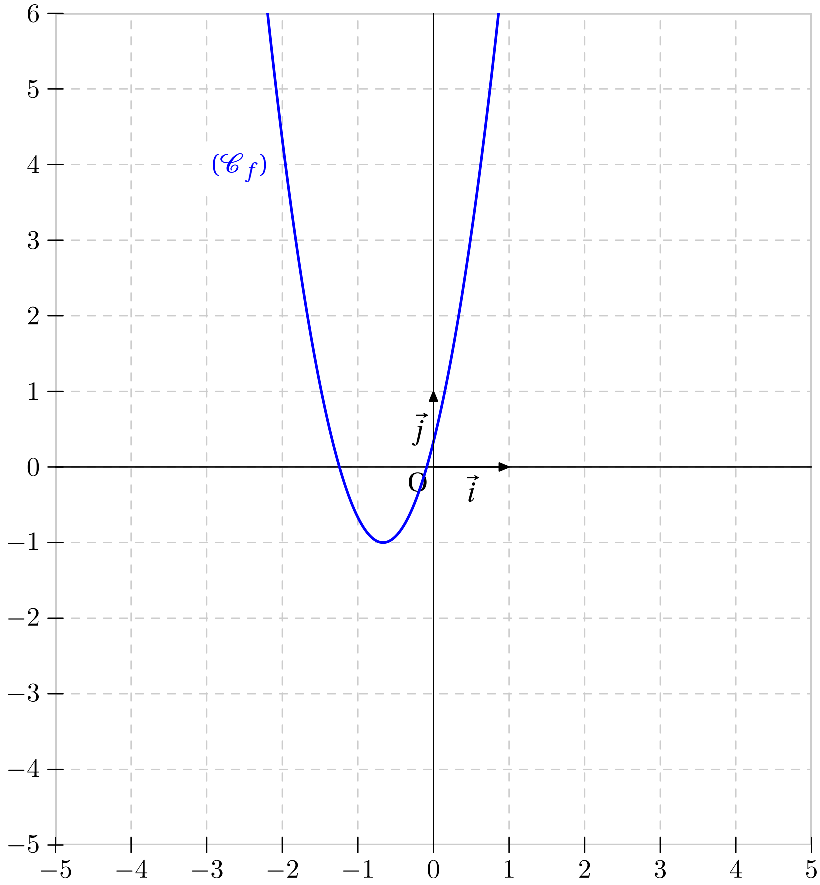


Exercice 31

Résoudre l'équation :

$$3x^2 + 4x + \frac{1}{3} = 0.$$

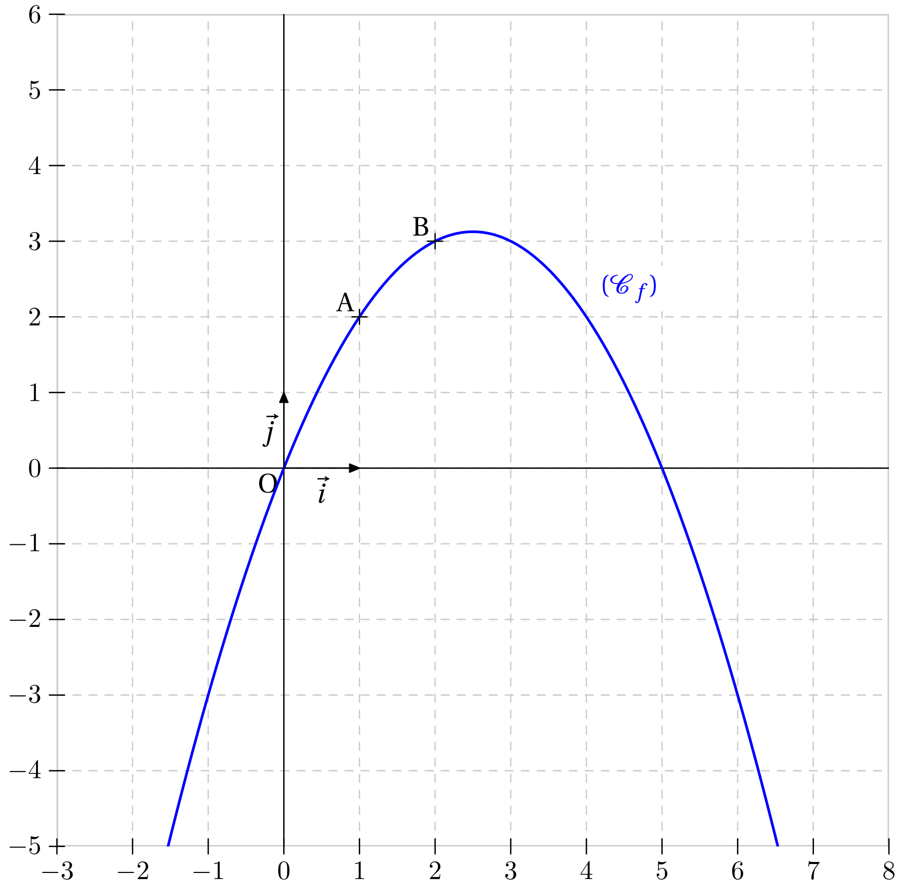
Illustration



Exercice 32

Une parabole passe par l'origine d'un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$ et par les points $A(1\ ;\ 2)$ et $B(2\ ;\ 3)$.
Quelle est la fonction représentée par cette parabole ?

Illustration



Exercice 33

1) Tracer sur un même graphique les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ représentant les fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 + x - 2 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x.$$

2) Déterminer les solutions des équations et des inéquations suivantes (on indiquera la méthode utilisée) :

a) $f(x) = 0$;

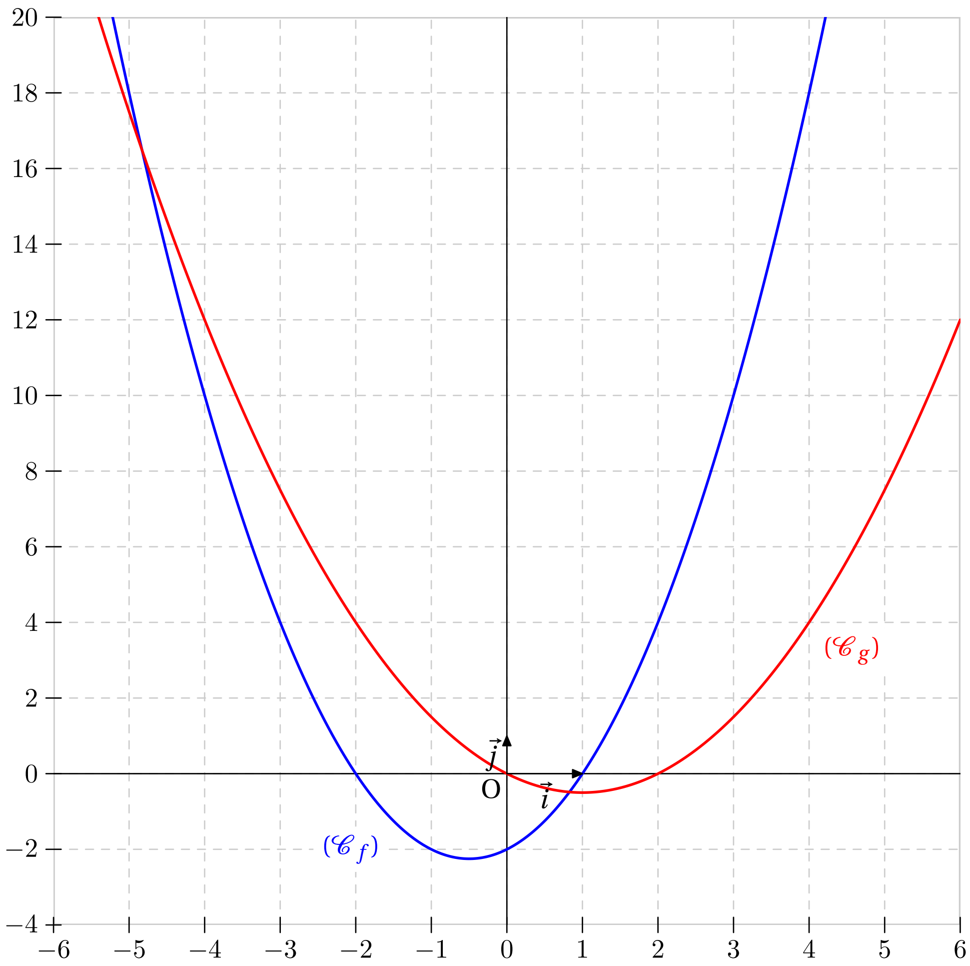
b) $g(x) \geqslant 0$;

c) $f(x) = g(x)$.

d) $f(x) \geqslant g(x)$;

e) $f(x)\, g(x) \geqslant 0$.

Illustration



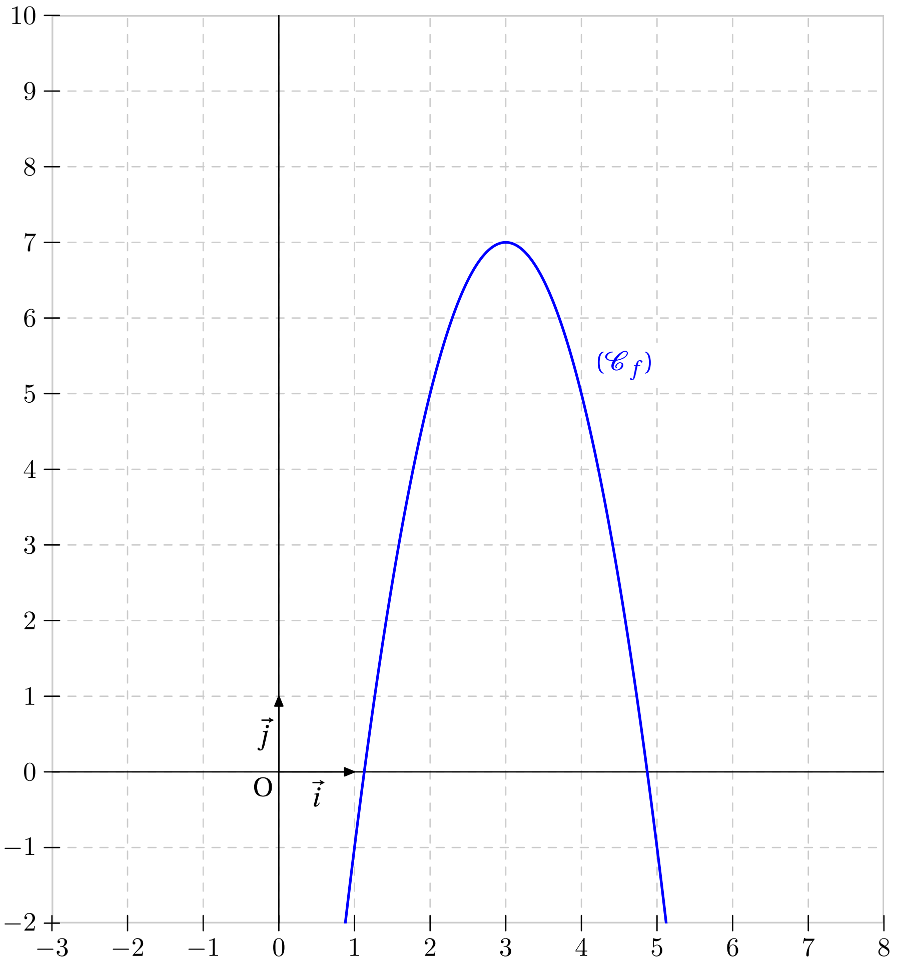
Exercice 34

On considère la fonction polynôme f définie par $f(x) = -2x^2 + 12x - 11$.

1) Donner sa forme canonique.

2) En déduire les variations de f.

Illustration



Exercice 35

On considère les fonctions polynômes f et g définies par :

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 15 \quad \text{et} \quad g(x) = 3x^3 + 4x^2 - 18x + 5$$

1) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

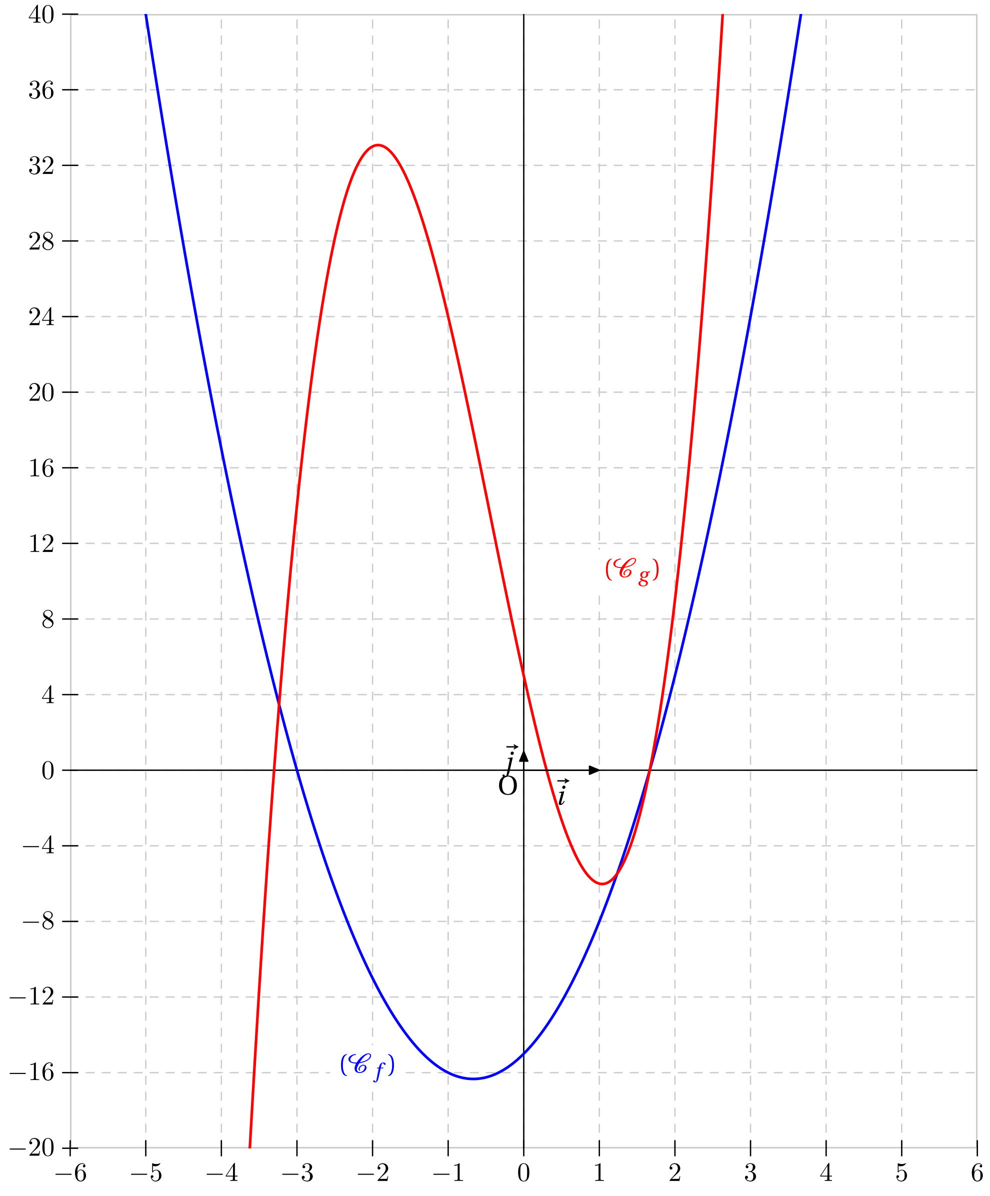
2) Factoriser $f(x)$.

3) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x,

$$g(x) = (3x - 5)(ax^2 + bx + c).$$

4) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

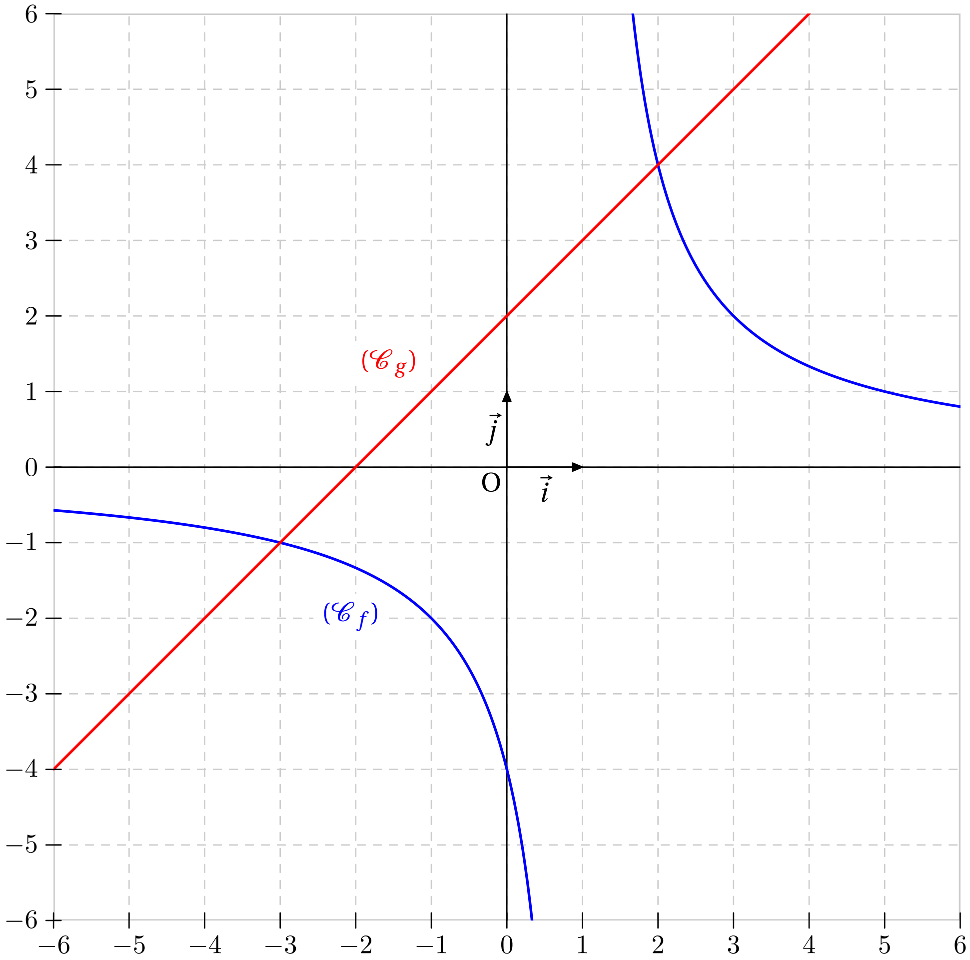
Illustration



Exercice 36

Résoudre l'inéquation : $\dfrac{4}{x-1} \leqslant x+2$.

Illustration



Exercice 37

On considère la fonction f définie par $f(x) = 1 + \dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}$
et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1) Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

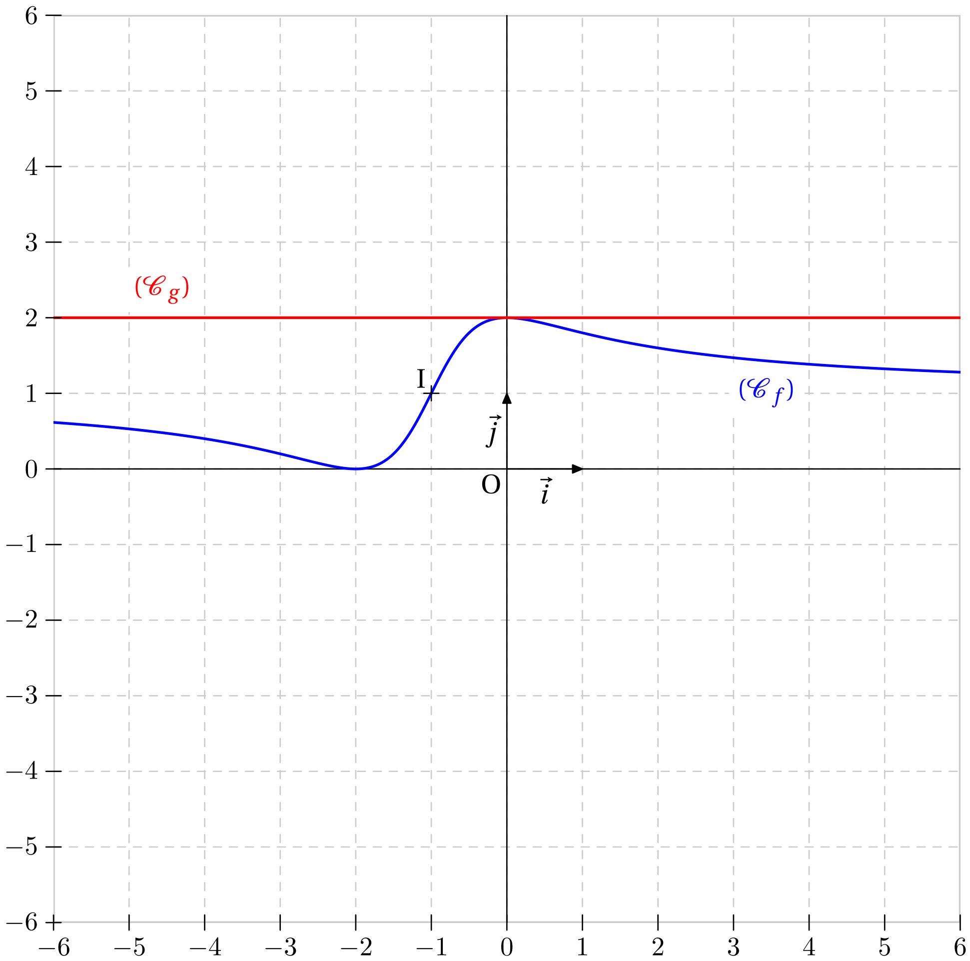
2) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

3) Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

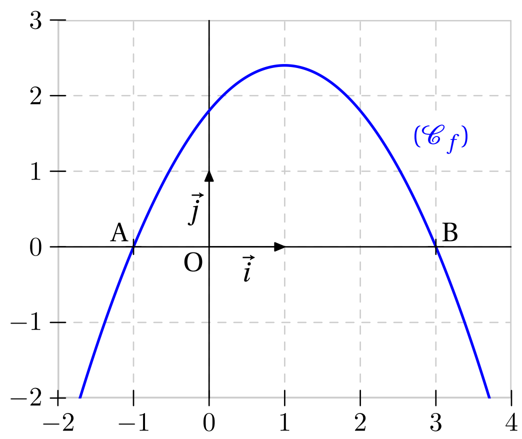
4) Montrer que pour tout réel x, $\quad f(x) \leqslant 2$.

5) Montrer que le point $I(-1\ ;\ 1)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

Illustration



Exercice 38



f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

dont la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ est la parabole représentée ci-contre.

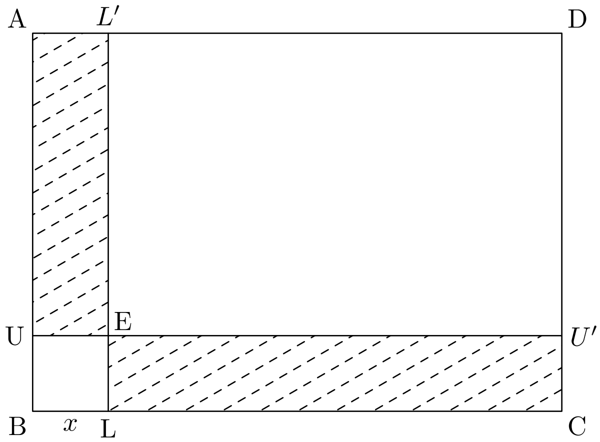
1) Le réel a est-il positif ? Pourquoi ?

2) Quel est le signe du discriminant ?

3) Grace aux informations de la courbe, donner la forme factorisée de $f(x)$ en fonction de a et x.

4) Déterminer les réels a et b sachant que $c = 1,8$.

Exercice 39



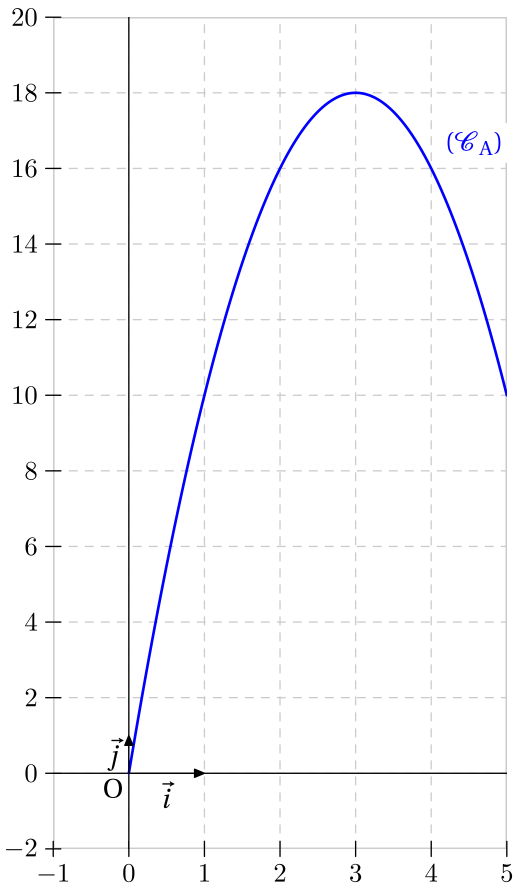
Soit$ABCD$ un rectangle tel que $AB = 5$ et $BC = 7$.
U est un point de $[AB]$ et L un point de $[BC]$.
Les droites (UU') et (LL') sont parallèles aux côtés du rectangle et définissent un carré $BLEU$.
On pose $BL = x$.

1) Dans quel intervalle varie x ?

2) Exprimer l'aire hachurée $A(x)$ en fonction de x.

3) Pour quelle(s) valeur(s) de x cette aire est-elle maximale ?

Illustration



Exercice 40

Le but de ce problème est de comparer les deux nombres suivants :

$$A = 1,000\,000\,2 \quad \text{et} \quad B = \sqrt{1,000\,000\,4}$$

1) Donner une valeur approchée de B.
Quelle conjecture peut-on faire sur A et B ?

2) Pour confirmer ou infirmer cette conjecture, nous allons utiliser deux fonctions.
Soient f et g les fonctions définies sur $[0;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{1+x}$$

a) Vérifier que A et B sont les images respectives d'un même réel a par les fonctions f et g.

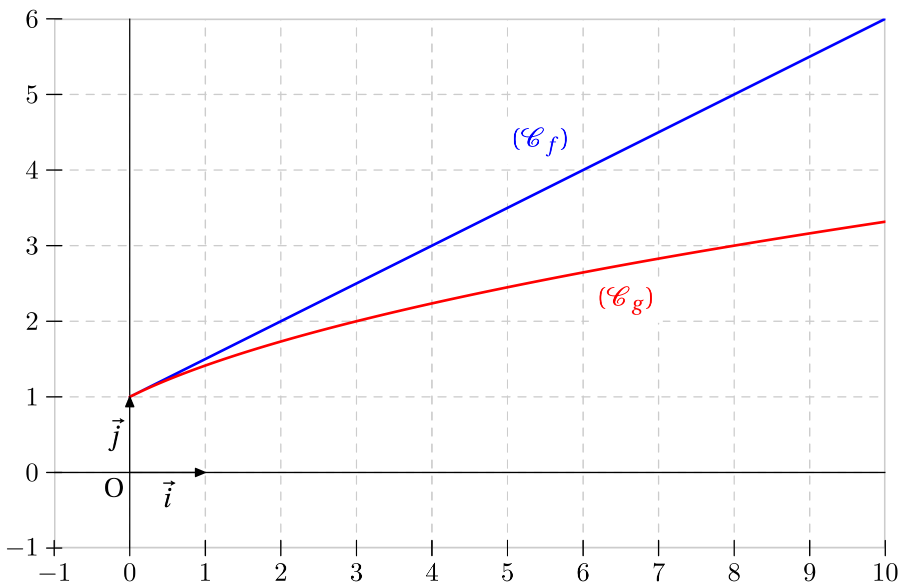
b) Montrer que $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$ pour tout $x \in [0;\ +\infty[$.

c) Comparer $(f(x))^2$ et $(g(x))^2$ pour tout $x \in [0;\ +\infty[$.

d) Que peut-on en déduire pour $f(x)$ et $g(x)$?

e) Conclure.

Illustration

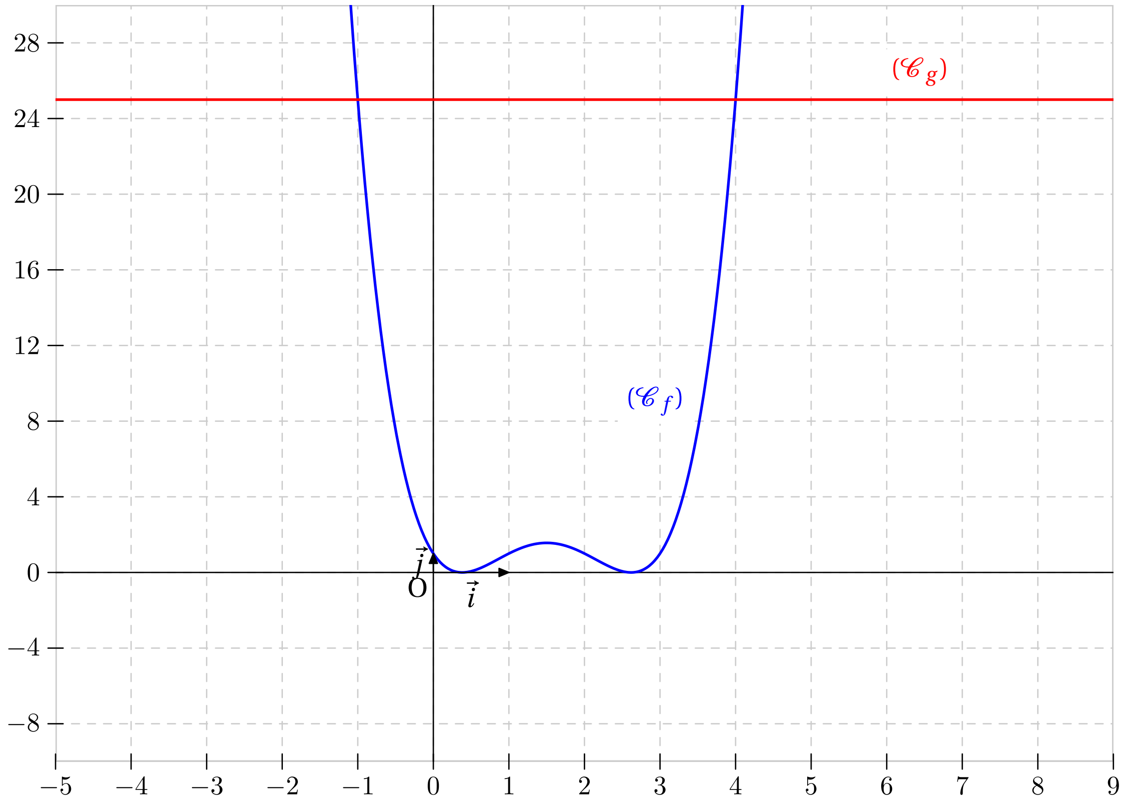


Exercice 41

Résoudre l'inéquation :

$$\left(x^2-3x+1\right)^2 \leqslant 25.$$

Illustration

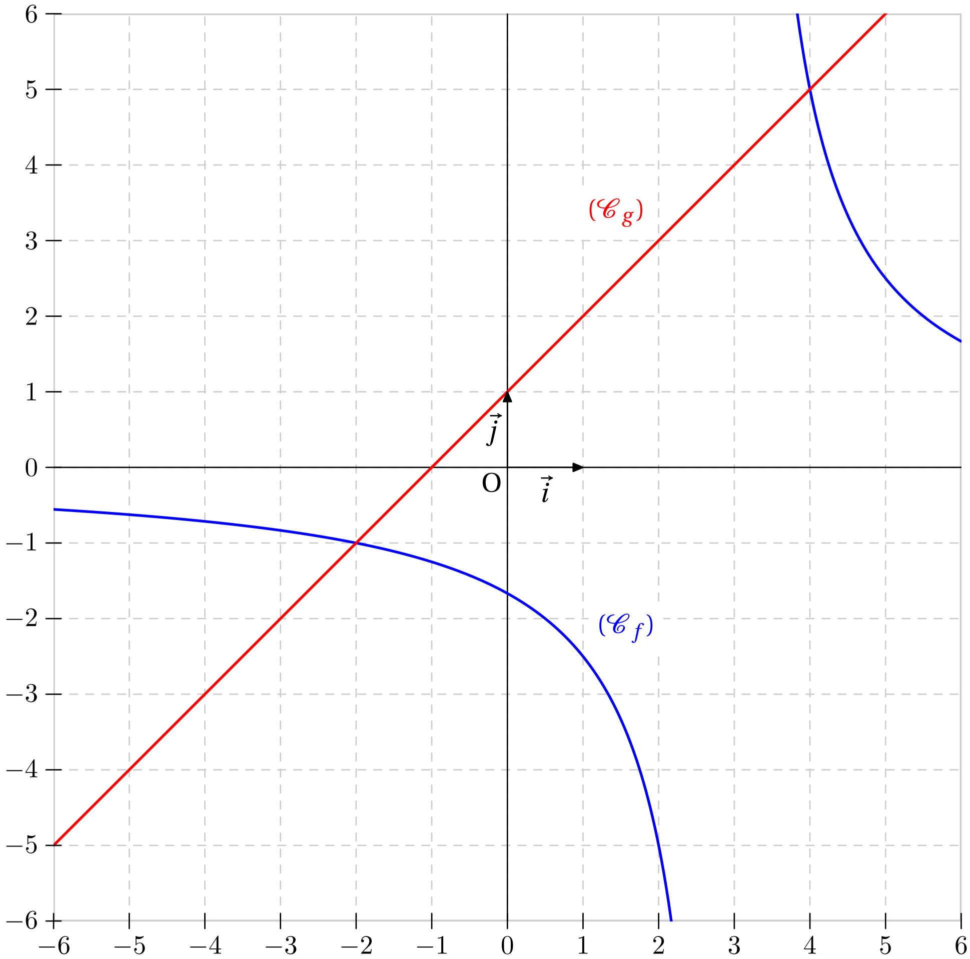


Exercice 42

Résoudre l'inéquation :

$$\frac{5}{x-3} < x+1.$$

Illustration



Exercice 43

1) Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré ayant un discriminant positif.
On appelle S la somme des racines et P leur produit.
Exprimer S et P en fonction des coefficients a, b et c.

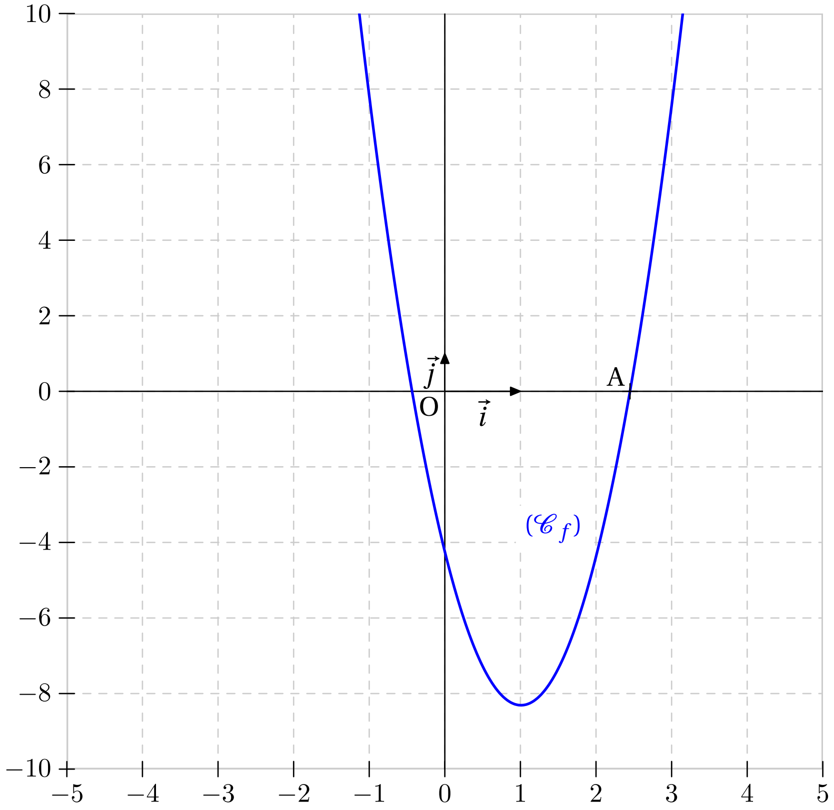
2) On donne le trinôme de second degré défini par :

$$P(x) = 4x^2 + (\sqrt{3} - 4\sqrt{6})x - \sqrt{18}.$$

a) Montrer que $P(x)$ admet $\sqrt{6}$ comme racine.

b) Déterminer l'autre racine.

Illustration



Exercice 44

On considère la fonction polynôme f définie par $f(x) = 3x^2 + 8x - 11$.

1) Donner sa forme canonique.

2) En déduire les variations de f.

Exercice 45

Exercice 46

Exercice 47

Exercice 48

Exercice 49

Exercice 50