

# Terminales S – corrigé du devoir en classe n° 5

## EXERCICE 1

$$f(x) = \sin^2(x) + \cos(x) \text{ avec } x \in \mathbb{R}$$

1. a. *Axe de symétrie de C*

On démontre que  $f$  est paire, c'est-à-dire, pour tout réel  $x$ ,  $f(-x) = f(x)$ . Ainsi l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de  $C$  (le repère étant orthogonal).

b. *Calcul de  $f(x + 2\pi)$*

Pour tout réel  $x$ ,  $f(x + 2\pi) = f(x)$ . Ainsi la fonction  $f$  est périodique de période  $2\pi$ . La courbe  $C$  est donc invariante par les translations de vecteurs  $2k\pi \vec{t}$  avec  $k$  un entier relatif.

2. a. *Dérivée de  $f$*

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = \sin(x)(2\cos(x) - \sqrt{3})$  pour tout réel  $x$ .

b. *Variations de  $f$  sur  $I = [0 ; \pi]$*

Pour tout réel  $x \in I$ ,  $\sin(x) \geq 0$ , ainsi le signe de  $f'(x)$  est le même, sur  $I$ , que celui de  $2\cos(x) - \sqrt{3}$ .

Pour trouver le signe de  $2\cos(x) - \sqrt{3}$ , qui s'annule pour  $x = \frac{\pi}{6}$  sur  $I$ , on peut utiliser le cercle trigonométrique ou la décroissance de la fonction cosinus sur l'intervalle  $[0 ; \pi]$ .

$x$	$0$	$\frac{\pi}{6}$	$\pi$
$f'(x)$	$0$	$+$	$0$
$f(x)$	$\sqrt{3}$	$\frac{7}{4}$	$-\sqrt{3}$

c. *Équation  $f(x) = 0$  sur  $[\frac{\pi}{6} ; \pi]$*

La fonction  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $[\frac{\pi}{6} ; \pi]$  donc  $f$  prend une fois et une seule toutes les valeurs comprises entre  $f(\pi) = -\sqrt{3}$  et  $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{7}{4}$ .

Ainsi la fonction  $f$  prend une seule fois la valeur 0, donc l'équation  $f(x) = 0$  possède une solution unique  $\alpha$  dans  $[\frac{\pi}{6} ; \pi]$ .

Par la méthode du balayage, on obtient  $2,0 \leq \alpha \leq 2,1$ .

d. *Algorithme*

Variable :	$a, b, m$ , sont des nombres réels
Initialisation :	Affecter à $a$ la valeur $\frac{\pi}{6}$ Affecter à $b$ la valeur $\pi$
Traitement :	Tant que $b - a \geq 0,001$ <div style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding-left: 10px; margin-left: 20px;"> <math>m</math> prend la valeur <math>\frac{a + b}{2}</math>                      Si <math>f(a) \times f(m) \leq 0</math>                        Alors <math>b</math> prend la valeur <math>m</math>                        Sinon <math>a</math> prend la valeur <math>m</math>                      Fin Si                 </div> Fin Tant que
Sortie :	Afficher $a, b$

## EXERCICE 2

### Partie A

1. Calcul de deux limites

$\frac{\sin(h)}{h} = \frac{\sin(0+h) - \sin(0)}{h}$  et en utilisant la définition de la dérivée de la fonction sinus en 0

on a  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = \sin'(0) = 1$ .

De même,  $\frac{\cos(h) - 1}{h} = \frac{\cos(0+h) - \cos(0)}{h}$  donc  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = \cos'(0) = 0$ .

2. et 3. Dérivabilité de la fonction sinus

Pour tout réel  $a$  et tout réel non nul  $h$  :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} &= \frac{\sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h) - \sin(a)}{h} \\ &= \frac{\sin(a)(\cos(h) - 1) + \cos(a)\sin(h)}{h} \\ &= \sin(a) \times \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(a) \times \frac{\sin(h)}{h}. \end{aligned}$$

En utilisant les résultats précédents,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \cos(a)$ .

Ainsi, la fonction sinus est dérivable pour tout réel  $a$  et  $\sin'(a) = \cos(a)$ .

La fonction sinus est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est la fonction cosinus.

### Partie B

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x - \pi} \text{ avec } x \in ]\pi; 2\pi]$$

Limite de  $f$  en  $\pi$

On pose  $h = x - \pi$  donc  $x = \pi + h$ .

Pour tout réel  $x \in ]\pi; 2\pi]$  (donc  $h \neq 0$ ) on a  $f(x) = \frac{\sin(\pi+h)}{h} = \frac{\sin(\pi+h) - \sin(\pi)}{h}$  car  $\sin(\pi) = 0$ .

Quand  $x$  tend vers  $\pi$  alors  $h$  tend vers 0 donc, en utilisant le résultat démontré dans la partie A, on a

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi+h) - \sin(\pi)}{h} = \sin'(\pi) = \cos(\pi) = -1.$$

## EXERCICE 3

1. Intersection des plans (AID) et (ACJ)

Les plans (AID) et (ACJ) ont le point A en commun, ils ne sont donc pas strictement parallèles.

Ils ne sont pas confondus, car sinon les points A, C, D, I et J seraient coplanaires, A appartiendrait au plan (BCD) ce qui est absurde. Les deux plans sont donc sécants.

D'autre part, le point G appartient à la droite (DI) donc au plan (AID) et également à la droite (CJ) donc au plan (ACJ).

Comme les points A et G ne sont pas confondus, les plans (AID) et (ACJ) sont sécants selon la droite (AG).

2. Orthogonalité de (AID) avec [BC] et de (ACJ) avec [BD]

Comme ABCD est un tétraèdre régulier, les triangles ABC et BCD sont équilatéraux. Ainsi, la droite (AI) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC et la droite (DI) celle issue de D dans le triangle BCD.

Le plan (AID) contient donc deux droites (AI) et (DI), sécantes en I, et orthogonales à [BC] donc le plan (AID) est orthogonal à l'arête [BC].

On procède de même pour l'arête [BD] en considérant les triangles équilatéraux ABD et BCD.

*Remarque : pour traiter cette question on pouvait également utiliser la notion de plan médiateur.*

3. *Orthogonalité de (AG) et (BCD)*

La droite (AG) est contenue dans le plan (AID) et comme ce plan est orthogonal à la droite (BC) alors la droite (AG) est orthogonale à la droite (BC).

De même, la droite (AG) est contenue dans le plan (ACJ) et comme ce plan est orthogonal à la droite (BD) alors la droite (AG) est orthogonale à la droite (BD).

La droite (AG) est donc orthogonale aux deux droites (BC) et (BD), sécantes en B, du plan (BCD) donc la droite (AG) est orthogonale (ou perpendiculaire) au plan (BCD).

#### EXERCICE 4

1. *Parallélisme entre (IJ) et (DB)*

Comme DCGH et BCGF sont des carrés, dans le triangle BDG, I est le milieu de [BG] et J celui de [DG].

D'après le théorème de la droite des milieux, les droites (IJ) et (DB) sont parallèles.

2. *Intersection des plans (ABD) et (AIJ)*

Les plans (ABD) et (AIJ) ne sont pas strictement parallèles car ils ont le point A en commun, ils ne sont pas confondus car sinon les points A, B, C, D seraient coplanaires avec I et J, ce qui est absurde, donc les plans (ABD) et (AIJ) sont sécants.

Les deux plans ont le point A en commun et la droite (DB), contenue dans le plan (ABD), est parallèle à la droite (IJ) contenue dans le plan (AIJ).

D'après le théorème « du toit », L'intersection des plans (ABD) et (AIJ) est la droite d passant par A, parallèle aux droites (DB) et (IJ).

3. *Intersection de d et de (DCG)*

La droite d est contenue dans le plan (ABD) et coupe (DC) en K.

Le point K appartient donc à la droite d et au plan (DCG), c'est donc le point d'intersection de la droite d et du plan (DCG).

*Trace sur la face DCGH de la section du cube par le plan (AIJ)*

La droite (KJ) est la droite d'intersection des plans (AIJ) et (DCG), car  $K \in (AIJ)$  et  $K \in (DCG)$ ,  $J \in (AIJ)$  et  $J \in (DCG)$ .

La droite (KJ) coupe (DH) en L et (CG) en M, la trace sur la face DCGH de la section du cube par le plan (AIJ) est donc le segment [LM].

4. *Construction de la section du cube par le plan (AIJ)*

La droite (MI) coupe (BF) en N. La section cherchée est le quadrilatère ALMN.

*Remarque : on peut démontrer que ALMN est un parallélogramme.*

# EXERCICE 1 – courbe représentative de f

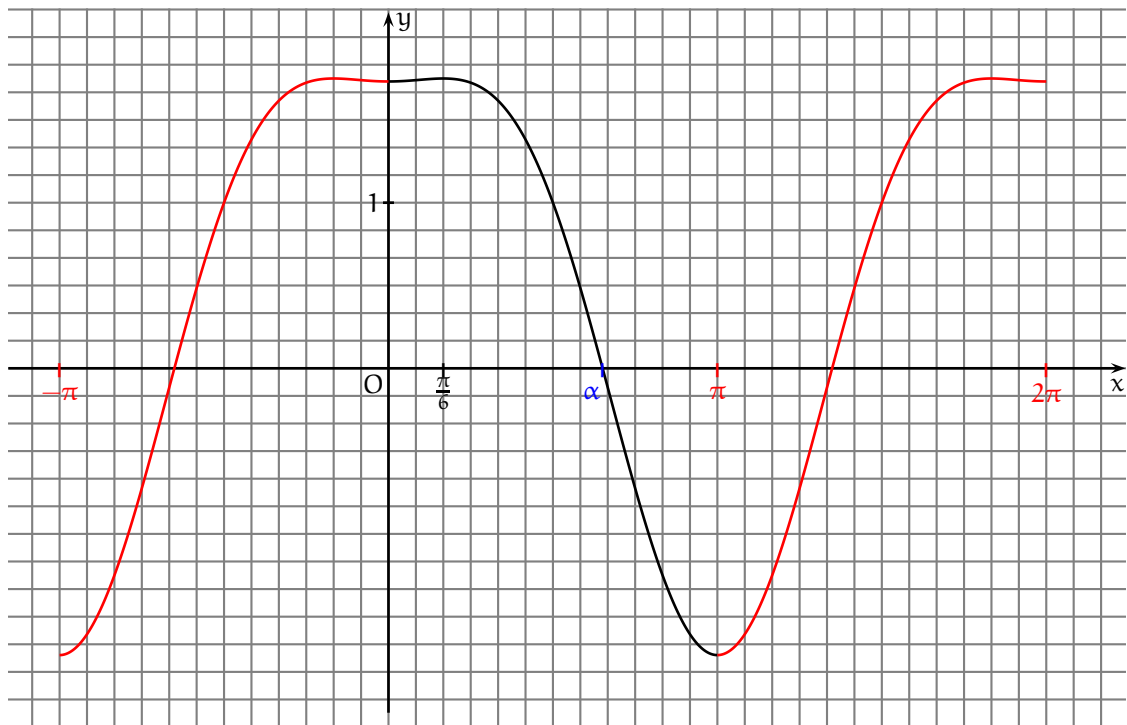


FIGURE DE L'EXERCICE 4

