Terminale S_4 – corrigé du devoir à la maison n° 3

Sujet D page 70 (QCM avec justifications)

$$\boxed{f(x) = 3 + \frac{1}{x+2} \text{ avec } x \in]-2\,;\,+\infty[}$$

1. *Limite de* f *en* -2

   $\lim\limits_{x \to -2} (x+2) = 0$ et $x + 2 > 0$ car $x \in]-2\,;\,+\infty[$ donc $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{x+2} = +\infty$, ainsi $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = +\infty$.

   La réponse correcte est la réponse b.

2. *Asymptotes à la courbe représentative de* f

   D'après la question précédente, la droite d'équation $x = -2$ est asymptote à la représentation graphique de f.

   D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

   Ainsi, la droite d'équation $y = 3$ est asymptote à la représentation graphique de f en $+\infty$.

   La courbe représentative de f possède donc deux asymptotes d'équations respectives $x = -2$ et $y = 3$.

   La réponse correcte est la réponse b.

3. *Limite d'une fonction composée avec* f

   On pose $y = f(x)$, on a alors $\lim\limits_{x \to -2} y = \lim\limits_{x \to -2} f(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{f(x)} = \lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{1}{y} = 0$.

   La réponse correcte est la réponse c.

4. *Limite d'une fonction* h *qui vérifie* $3 - f(x) < h(x) < f(x) - 3$, *pour tout réel* $x > -2$

   On a vu que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} [3 - f(x)] = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 3] = 0$.

   D'après le « squeeze theorem »[1], $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$.

   La réponse correcte est la réponse c.

1. Théorème des gendarmes = squeeze theorem = Einschnürungssatz = teorema del emparedado = teorema del confronto.

Exercice n° 148 page 72

$$\boxed{f(x) = 5 + \frac{2}{1-x} + \frac{1}{2x-6} \text{ avec } x \in D =]-\infty\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ 3[\cup]3\ ;\ +\infty[}$$

a. *$\mathscr{C}_f$ possède trois asymptotes*

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{1-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-6) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x-6} = 0$ ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$.

On démontre de la même façon, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5$.

La droite d'équation $y = 5$ est donc asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Cette asymptote est parallèle à l'axe des abscisses.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(1-x) = 0\\ x>1 \text{ alors } 1-x<0\end{array}\right\}\text{donc } \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{2}{1-x} = -\infty, \text{comme } \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(5+\frac{1}{2x-6}\right) = \frac{19}{4} \text{ alors } \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = -\infty.$$

Avec un raisonnement analogue on a $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = +\infty$.

La droite d'équation $x = 1$ est donc asymptote à $\mathscr{C}_f$. Cette asymptote est parallèle à l'axe des ordonnées.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}(2x-6) = 0\\ x>3 \text{ alors } 2x-6>0\end{array}\right\}\text{donc } \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}\frac{1}{2x-6} = +\infty, \text{comme } \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}\left(5+\frac{2}{1-x}\right) = 4 \text{ alors } \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x) = +\infty.$$

Avec un raisonnement analogue on a $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x) = -\infty$.

La droite d'équation $x = 3$ est donc asymptote à $\mathscr{C}_f$. Cette asymptote est parallèle à l'axe des ordonnées.

Finalement $\mathscr{C}_f$ possède trois asymptotes d'équations respectives : $y = 5$, $x = 1$ et $x = 3$.

b. *Extrémums de la fonction* f

f est dérivable pour tout $x \in D$ et on a :

$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} - \frac{2}{(2x-6)^2} = \frac{2(2x-6)^2 - 2(1-x)^2}{(1-x)^2(2x-6)^2} = \frac{2(2x-6+1-x)(2x-6-1+x)}{(1-x)^2(2x-6)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x-5)(3x-7)}{2(1-x)^2(x-3)^2}.$$

Comme $2(1-x)^2(x-3)^2 > 0$ pour tout $x \in D$, le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-5)(3x-7)$ qui est un trinôme du second degré qui s'annule en $\dfrac{7}{3}$ et 1.

Les variations de f sont résumées dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		$\frac{7}{3}$		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{11}{4}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{19}{4}$	↗	5

La fonction f a donc un maximum local en $\dfrac{7}{3}$ égal à $\dfrac{11}{4}$ et un minimum local en 5 égal à $\dfrac{19}{4}$.

c. *Intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'asymptote parallèle à l'axe des abscisses*

Il suffit de résoudre, *algébriquement*, l'équation $f(x) = 5$, on obtient ainsi que $\mathscr{C}_f$ et l'asymptote d'équation $y = 5$ se coupent au point de coordonnées $\left(\dfrac{11}{3}\ ;\ 5\right)$.