

Terminale S₄ – devoir à la maison n° 2

À rendre jeudi 10 octobre 2013

EXERCICE 1

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.

1. a. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 .
b. Vérifier que si n est l'un des entiers $0, 1, 2, 3, 4$, alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^{n+1}$.
c. Établir que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - 1 = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.
d. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^{n+1}$.
2. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{3u_n + 3}{1 - u_n}$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison -3 .
En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
 - b. Calculer u_n en fonction de v_n .
 - c. Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 2

Pour entretenir en bon état de fonctionnement le chauffage, une société immobilière fait contrôler les chaudières de son parc de logements pendant l'été. On sait que 20 % des chaudières sont sous garantie.

Parmi les chaudières sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est 0,01.

Parmi les chaudières qui ne sont plus sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est 0,1.

On appelle G l'évènement « la chaudière est sous garantie ».

1. Calculer la probabilité des évènements suivants :
A : « la chaudière est sous garantie et est défectueuse » ;
B : « la chaudière est défectueuse ».
2. Dans un logement la chaudière est défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle soit sous garantie.
3. Le contrôle est gratuit si la chaudière est sous garantie. Il coûte 80 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et n'est pas défectueuse. Il coûte 280 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et est défectueuse. On note X la variable aléatoire qui représente le coût du contrôle d'une chaudière. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.
4. Au cours de la période de contrôle, on a trouvé 5 chaudières défectueuses. Quelle est la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles soit sous garantie ?