Compléments sur la dérivation

Terminale S
Lycée Charles PONCET

Novembre 2012

Table des matières

Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

Dans tout le chapitre les intervalles sont de « vrais intervalles », c'est-à-dire non vides et non réduits à un singleton.

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1.1.1
Soit f *une fonction définie sur un intervalle ouvert (non vide)* I *et soit* $a \in I$.
La fonction f *est* dérivable en a *si l'une des deux conditions est réalisée :*

- *la fonction* $h \longmapsto T(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$*, définie pour tout* $h \neq 0$ *tel que* $a+h \in I$*, admet une limite finie en* 0 *;*
- *la fonction* $x \longmapsto T(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$*, définie pour tout* $x \in I - \{a\}$*, admet une limite finie en* a*.*

Cette limite est appelée le nombre dérivé de f en a *et notée* $f'(a)$.

☛ Les deux conditions de la définition 1.1.1 sont équivalentes ($h = x - a$).

✏ En utilisant la définition 1.1.1, déterminer le nombre dérivé de la fonction $x \longmapsto f(x) = x^3$ en $a \in \mathbb{R}$, puis le nombre dérivé de la fonction $x \longmapsto g(x) = \dfrac{1}{x}$ en $a \in \mathbb{R}^*$.

Définition 1.1.2
On dit qu'une fonction f *est* dérivable *sur un intervalle* I *si elle est dérivable pour tout* $x \in I$.
La fonction dérivée *de* f*, notée* f'*, est la fonction qui à tout* $x \in I$ *associe le nombre* $f'(x)$.

✏ Donner les fonctions dérivées de $x \longmapsto f(x) = x^3$ et de $x \longmapsto g(x) = \dfrac{1}{x}$.

Définition 1.1.3
Soit f *une fonction dérivable sur un intervalle* I. *Si* f' *est également dérivable sur* I*, la dérivée de* f' *est appelée la* dérivée seconde *de* f *et notée* f''.

On définit de la même manière les dérivées successives de f. *La dérivée d'ordre* n *de* f *est notée* $f^{(n)}$ *et, pour tout entier naturel* n *non nul,* $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.

1.2 Interprétation géométrique

On suppose que f est une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$, on note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

Soit $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$. La droite passant par A de coordonnées $(a\,;\,f(a))$ et M de coordonnées $(a+h\,;\,f(a+h))$ a pour équation réduite :

$$y = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}(x-a) + f(a).$$

Quand h tend vers 0, cette droite a une position limite appelée *tangente en* A à la courbe représentative de f et a pour équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

$f'(a)$ est donc le *coefficient directeur* de la tangente en A à la courbe représentative de f.

✏ Faire une figure.

1.3 Continuité et dérivabilité

Théorème 1.3.1
Si une fonction f *est dérivable en* a *alors* f *est continue en* a.

Preuve du théorème 1.3.1

On suppose qu'une fonction f, définie sur un intervalle ouvert I, est dérivable en $a \in I$.
Pour tout réel $x \in I - \{a\}$, on pose $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$.

a. Quelle est la limite de la fonction φ en a ?
b. Calculer $f(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.
c. Déterminer la limite de f en a et conclure.

Remarque importante

La réciproque du théorème 1.3.1 est fausse : il existe des fonctions continues en a qui ne sont pas dérivables en a.
✏ Étudier la dérivabilité de $x \longmapsto \sqrt{x}$ en 0.

1.4 Dérivée et sens de variation

Théorème 1.4.1 (admis)
Soit f *une fonction dérivable sur un intervalle* I.

1. *Si, pour tout* $x \in I$, $f'(x) > 0$ *sauf en des points isolés de* I *où* $f'(x)$ *s'annule alors* f *est strictement croissante sur* I.
2. *Si, pour tout* $x \in I$, $f'(x) < 0$ *sauf en des points isolés de* I *où* $f'(x)$ *s'annule alors* f *est strictement décroissante sur* I.
3. *Si, pour tout* $x \in I$, $f'(x) = 0$ *alors* f *est constante sur* I.

✏ Étudier les variations de $x \longmapsto f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 3$ sur $\mathbb{R}$.

1.5 Dérivation et limites

On peut utiliser la définition du nombre dérivé (définition 1.1.1) pour trouver certaines limites.
En effet, si f est une fonction dérivable en a alors :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

✏ Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$.

2 Formules complémentaires de dérivation

2.1 Dérivée de $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$

Théorème 2.1.1
Soit u *une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle* I *de fonction dérivée* u'.
Soit f *la fonction définie pour tout réel* x *de* I *par* $f(x) = \sqrt{u(x)}$.
f *est dérivable pour tout réel* x *de* I *et la fonction dérivée* f' *de* f *est définie pour tout réel* x *de* I *par :*

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

✏ Soit f la fonction définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$.
Vérifier que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et déterminer la fonction dérivée f' de f.
Étudier la dérivabilité de f en 0.

2.2 Dérivée de $x \longmapsto \big(u(x)\big)^n$

Théorème 2.2.1
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de fonction dérivée u' et soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soit f_n la fonction définie pour tout réel x de I par $f_n(x) = \big(u(x)\big)^n$.
f_n est dérivable pour tout réel x de I et la fonction dérivée f_n' de f_n est définie pour tout réel x de I par :

$$f_n'(x) = nu'(x)\big(u(x)\big)^{n-1}.$$

✏ Démontrer le théorème 2.2.1 en utilisant un raisonnement par récurrence.

Théorème 2.2.2
Soit u une fonction dérivable et non nulle sur un intervalle I de fonction dérivée u' et soit n un entier strictement négatif.
Soit g_n la fonction définie pour tout réel x de I par $g_n(x) = \big(u(x)\big)^n$.
g_n est dérivable pour tout réel x de I et la fonction dérivée g_n' de g_n est définie pour tout réel x de I par :

$$g_n'(x) = nu'(x)\big(u(x)\big)^{n-1}.$$

✏ Démontrer le théorème 2.2.2 en remarquant que, pour tout réel a non nul, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

✏ Déterminer les fonctions dérivées de $x \longmapsto f(x) = (-3x+1)^4$ et de $x \longmapsto g(x) = \dfrac{1}{(-3x+1)^4}$.

2.3 Dérivée de $x \longmapsto u(ax + b)$

Théorème 2.3.1 (admis)
a et b sont deux nombres réels tels que $a \neq 0$.
Si u est dérivable sur un intervalle J et si I est un intervalle tel que, pour tout $x \in I$, $ax + b$ appartient à J, alors la fonction $x \longmapsto f(x) = u(ax+b)$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée f' est définie pour tout réel x de I par :

$$f'(x) = a \times u'(ax+b).$$

✏ Déterminer la fonction dérivée de $x \longmapsto f(x) = \sqrt{ax+b}$ sur tout intervalle où $ax + b > 0$.