# Corrigé du devoir surveillé n$^o$ 2

## Exercice

1. (a) $u$ n'est pas l'endomorphisme nul donc il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(x) \neq 0$. Montrons qu'alors la famille $\langle x\,,\, u(x)\rangle$ est libre :
Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha\, x + \beta\, u(x) = 0$, en composant par $u$ on a $\alpha\, u(x) + \beta\, u^2(x) = 0$
$u^2 + \text{id} = \overline{0}$, donc $u^2(x) = -x$, ce qui donne le système :
$\begin{cases} \alpha\, x + \beta\, u(x) &= 0 \\ -\beta\, x + \alpha\, u(x) &= 0 \end{cases}$ qui implique $\begin{cases} \alpha\, x + \beta\, u(x) &= 0 \\ (\alpha^2 + \beta^2)\, x &= 0 \quad L_2 \leftarrow \alpha\, L_1 - \beta\, L_2 \end{cases}$
La deuxième équation donne $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ et comme $x \neq 0$ et $\alpha$ et $\beta$ réels, on en déduit $\alpha = \beta = 0$.
Remarque : Si $\beta = 0$, le système devient $\alpha\, x = \alpha\, u(x) = 0$ donc $\alpha = 0$.

$$\boxed{\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha\, x + \beta\, u(x) = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = 0 \text{ donc la famille } \langle x\,,\, u(x)\rangle \text{ est libre}}$$

(b) La famille $\langle x\,,\, u(x)\rangle$ est libre donc elle engendre un espace vectoriel de dimension deux.
Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, il existe $y \in \mathbb{R}^3$ tel que $y \notin \text{Vect}\langle x\,,\, u(x)\rangle$, donc $\langle x\,,\, u(x),\, y\rangle$ est libre.
C'est une famille libre de cardinal 3, donc une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Soient $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\alpha\, x + \beta\, u(x) + \gamma\, y + \delta\, u(y) = 0$, en composant par $u$ on a $\alpha\, u(x) + \beta\, u^2(x) + \gamma\, u(y) + \delta\, u^2(y) = 0$.
$\begin{cases} \alpha\, x + \beta\, u(x) + \gamma\, y + \delta\, u(y) &= 0 \\ -\beta\, x + \alpha\, u(x) - \delta\, y + \gamma\, u(y) &= 0 \end{cases}$
$\begin{cases} \alpha\, x + \beta\, u(x) + \gamma\, y + \delta\, u(y) &= 0 \\ (\alpha\,\gamma + \beta\,\delta)\, x + (\beta\,\gamma - \alpha\,\delta)\, u(x) + (\gamma^2 + \delta^2)\, y &= 0 \quad L_2 \leftarrow \gamma\, L_1 - \delta\, L_2 \end{cases}$
La famille $\langle x\,,\, u(x),\, y\rangle$ est libre donc $\alpha\,\gamma + \beta\,\delta = \beta\,\gamma - \alpha\,\delta = \gamma^2 + \delta^2 = 0$
$\gamma^2 + \delta^2 = 0$ entraine $\gamma = \delta = 0$ puis en reportant dans $L_1$ : $\alpha\, x + \beta\, u(x) = 0$ donc $\alpha = \beta = 0$ puisque $\langle x\,,\, u(x)\rangle$ est libre.
On en conclut que la famille $\langle x\,,\, u(x),\, y,\, u(y)\rangle$ est libre.

(d) Une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est nécessairement liée puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, donc l'hypothèse de départ est absurde ; ainsi $u^2 + \text{id} \neq \overline{0}$.

2. $u \circ (u^2 + \text{id}) = u^3 + u = \overline{0}$ par hypothèse.
Supposons $u$ bijectif, alors en composant à gauche par $u^{-1}$ on aurait $u^{-1} \circ u \circ (u^2 + \text{id}) = u^2 + \text{id} = \overline{0}$
De même si $u^2 + \text{id}$ est bijectif, alors en composant à droite par sa bijection réciproque, on a $u \circ (u^2 + \text{id}) \circ (u^2 + \text{id})^{-1} = u = \overline{0}$.
Or ni $u$ ni $u^2 + \text{id}$ n'est l'endomorphime nul ce n'est donc pas possible.

3. $\text{Ker}(u^2 + \text{id}) = \{0\} \iff u^2 + \text{id}$ injectif, et comme on est en dimension finie, $u^2 + \text{id}$ bijectif ; ce qui n'est pas d'après la question précédente.
De même $\text{Ker}(u) = \{0\}$ entraine $u$ injectif, donc bijectif.

4. Soient $a \in \text{Ker}(u)$ et $b \in \text{Ker}(u^2 + \text{id})$ tous deux non nuls *(a et b existent bien d'après la question précedente)*, et soient $(\alpha,\, \beta,\, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha\, a + \beta\, b + \gamma\, u(b) = 0$.
On compose par $u$ deux fois successivement et on obtient
$\begin{cases} \alpha\, a + \beta\, b + \gamma\, u(b) &= 0 \\ \alpha\, \underbrace{u(a)}_{0 \text{ car } a \in \ker u} + \beta\, u(b) + \gamma\, \underbrace{u^2(b)}_{-b \text{ car } a \in \ker(u^2 + \text{id})} &= 0 \\ \beta\, u^2(b) + \gamma\, u^3(b) &= 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} \alpha\, a + \beta\, b + \gamma\, u(b) &= 0 \\ -\gamma\, b + \beta\, u(b) &= 0 \\ -\beta\, b - \gamma\, u(b) &= 0 \end{cases}$
L'unique solution de ce système est $\alpha = \beta = \gamma = 0$ donc la famille $\langle a\,,\, b\,,\, u(b)\rangle$ est libre. Comme elle est de cardinal 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de $u$ dans cette base est $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

# Problème

## Partie I : Étude de l'application D

1. (a) L'image par $D$ d'une suite $(u)$ est une suite $(v)$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1}$ donc $D$ est bien à valeurs dans $E$.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soient $(u)$ et $(v)$ deux suites de $E$, alors :
$D(\alpha\, u + v)$ est la suite $(w)$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \alpha\, u_{n+1} + v_{n+1}$
Or les suites $D(u)$ et $D(v)$ sont définies par $\forall n \in \mathbb{N},\ D(u)_n = u_{n+1}$ et $D(v)_n = v_{n+1}$
; donc $\forall n \in \mathbb{N},\ D(w)_n = \alpha\, D(u)_n + D(v)_n$
Ainsi $D$ est linéaire, de $E$ vers $E$. $D \in \mathscr{L}(E)$.

   (b) Soit $(u) \in \operatorname{Ker} D$, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0$ donc seul $u_0$ est éventuellement non nul.
Réciproquement, toute suite telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0$ appartient à $\operatorname{Ker} D$.

$$\boxed{\text{Ker } D \text{ est la droite vectorielle engendrée par la suite } (u) \text{ telle que } u_0 = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ u_n = 0.}$$

Montrons à présent que $\boxed{D \text{ est surjective}}$ : soit $(u)$ une suite, la suite $(v)$ définie par $v_0 = 0$ par exemple et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = u_{n-1}$ est telle que $D(v) = (u)$.
Remarque : on peut en fait choisir n'importe quelle valeur pour $v_0$.

2. $\forall n \in \mathbb{N},\ a\,3^n + b\,2^n + c\,n\,2^n = 0$.
En particulier pour $n = 0$ : $a + b = 0$
pour $n = 1$ : $3\,a + 2\,b + 2\,c = 0$
Enfin pour $n = 2$ : $9\,a + 4\,b + 8\,c = 0$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcll} a + b & = & 0 & \\ a + 2\,c & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ 5\,a + 8\,c & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 4\,L_1 \end{array}\right.$$

L'unique solution de ce système est $a = b = c = 0$, or :
$\Big(\forall n \in \mathbb{N},\ a\,3^n + b\,2^n + c\,n\,2^n = 0\Big) \Longrightarrow \Big(\forall n \in \{0,1,2\},\ a\,3^n + b\,2^n + c\,n\,2^n = 0\Big)$ et
$\Big(\forall n \in \{0,1,2\},\ a\,3^n + b\,2^n + c\,n\,2^n = 0\Big) \iff \big(a = b = c = 0\big)$ ; d'autre part si $a = b = c = 0$ on a bien $\forall n \in \mathbb{N},\ a\,3^n + b\,2^n + c\,n\,2^n = 0$. Donc la famille $\langle A,\, B,\, C\rangle$ est libre.

3. Par définition de $G$, la famille $\langle A,\, B,\, C\rangle$ l'engendre, on vient de montrer qu'elle est libre, c'est donc une base de $G$.

$$\boxed{\langle A,\, B,\, C\rangle \text{ est une base de } G \text{ et } \dim(G) = 3.}$$

4. $D(A)$ est la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ D(A)_n = 3^{n+1} = 3 \times 3^n$, donc $D(A) = 3\,A$ ; de même $D(B) = 2\,B$.
$\forall n \in \mathbb{N},\ D(C)_n = (n+1)\,2^{n+1} = 2 \times n\,2^n + 2 \times 2^n = 2\,B_n + 2\,C_n$, par conséquent $D(C) = 2\,B + 2\,C$.
On a $D(A) \in G$, $D(B) \in G$ et $D(C) \in G$, donc par linéarité de $D$, $\forall u \in G,\ D(u) \in G$.
Remarque : le fait que $G$ soit stable par $D$ permet de définir un endomorphisme induit par $D$ sur l'ensemble $G$.

5. D'après les calculs de la question précédente, $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

6. $M^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 24 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

7. Par identification, on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 9\,a + 3\,b + c & = & 27 \\ 4\,a + 2\,b + c & = & 8 \\ 4\,a + 2\,b + c & = & 8 \\ 8\,a + 2\,b & = & 24 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcll} 4\,a + 2\,b + c & = & 8 & L_1 \leftarrow L_2 \\ 5\,a + b & = & 19 & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ 4\,a + b & = & 12 & L_3 \leftarrow L_4/2 \end{array}\right. \text{ et on trouve } \left\{\begin{array}{l} a = 7 \\ b = -16 \\ c = 12 \end{array}\right.$$

$$\boxed{M^3 = 7\,M^2 - 16\,M + 12\,I_3}$$

8. $M^3 - 7\,M^2 + 16\,M = 12\,I_3$, donc $M \times \big(M^2 - 7\,M + 16\,I_3\big) = \big(M^2 - 7\,M + 16\,I_3\big) \times M = 12\,I_3$, donc $M$ est inversible d'inverse

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{12}\,\big(M^2 - 7\,M + 16\,I_3\big)}$$

9. $M$ est une matrice associée à $\widehat{D}$, $M$ est inversible, donc $\widehat{D}$ est bijectif, c'est un automorphisme de $G$.
10. $M^{-1}$ est associée à $(\widehat{D})^{-1}$, or $M^{-1} = \dfrac{1}{12}\left(M^2 - 7\,M + 16\,I_3\right)$ donc $(\widehat{D})^{-1} = \dfrac{1}{12}\left(\widehat{D}\circ\widehat{D} - 7\,\widehat{D} + 16\,\mathrm{id}_G\right)$.

## Partie II : Suites définies par une relation de récurrence linéaire d'ordre 3

1. D'après les résultats de la première partie, on a $\forall u \in G$, $\widehat{D}^3(u) - 7\,\widehat{D}^2(u) + 16\,\widehat{D}(u) - 12\,A = 0$ (suite nulle)
En particulier $\widehat{D}^3(A) - 7\,\widehat{D}^2(A) + 16\,\widehat{D}(A) - 12\,A = 0$ et $\widehat{D}^3(B) - 7\,\widehat{D}^2(B) + 16\,\widehat{D}(B) - 12\,B = 0$ ; donc $A$ et $B$ sont deux suites géométriques appartenant à $\mathcal{H}$.
Soit $u$ une suite géométrique élément de $\mathcal{H}$, on a :
$\begin{cases} \exists q \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} &= q\,u_n \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n\,u_0 \\ \qquad\quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} &= 7\,u_{n+2} - 16\,u_{n+1} + 12\,u_n \end{cases}$ d'où en substituant
$\forall n \in \mathbb{N}, q^{n+3}u_0 = 7\,q^{n+2}u_0 - 16\,q^{n+1}u_0 + 12\,q^n u_0$
Si $u_0$ et $q$ ne sont pas nuls, alors $q^3 - 7\,q^2 + 16\,q - 12 = 0$.
On sait déjà que $q = 2$ et $q = 3$ sont solution de cette équation puisque $A$ et $B$ sont dans $\mathcal{H}$. On factorise alors et on obtient : $q^3 - 7\,q^2 + 16\,q - 12 = (q-3)\,(q-2)^2$, donc les suites géométriques de $\mathcal{H}$ sont les suites géométriques de raison 2 ou 3 plus la suite nulle évidemment.
2. $D^2$ est l'endomorphisme de $E$ qui à $u$ associe $D^2(u)$ définie par $n \longmapsto u_{n+2}$ ; de même $D^3(u)$ est définie $n \longmapsto u_{n+3}$.
Ainsi $T$ est l'endomorphisme de $E$ qui à $u$ associe $T(u)$ définie par $n \longmapsto u_{n+3} - 7\,u_{n+2} + 16\,u_{n+1} - 12\,u_n$.
Donc les éléments de $\mathcal{H}$ sont exactement les éléments de $\mathrm{Ker}(T)$.
3. On a prouvé à la partie précédente que $\widehat{D}^3 = 7\,\widehat{D}^2 - 16\,\widehat{D} + 12\,\mathrm{id}_G$, donc $\forall u \in G$,
$\widehat{D}^3(u) = D^3(u) = 7\,D^2(u) - 16\,D(u) + 12\,u$. Ainsi $u \in \mathrm{Ker}\ (T)$ donc $G \subset \mathrm{Ker}\ (T)$.
4. (a) La suite $v = D^2(u) - 4\,D(u) + 4\,u$ a pour terme général $v_n = u_{n+2} - 4\,u_{n+1} + 4\,u_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$,
$v_{n+1} = u_{n+3} - 4\,u_{n+2} + 4\,u_{n+1} = (7\,u_{n+2} - 16\,u_{n+1} + 12\,u_n) - 4\,u_{n+2} + 4\,u_{n+1} = 3\,(u_{n+2} - 4\,u_{n+1} + 4\,u_n)$

$$\boxed{v \text{ est une suite géométrique de raison } q = 3}$$

(b) • Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \lambda\,3^n$ $(\lambda = v_0)$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 4\,u_{n+1} + 4\,u_n = \lambda\,3^n$.
On en déduit $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} w_{n+2} - 4\,w_{n+1} + 4\,w_n &= (u_{n+2} - v_{n+2}) - 4\,(u_{n+1} - v_{n+1}) + 4\,(u_n - v_n) \\ &= \underbrace{(u_{n+2} - 4\,u_{n+1} + 4\,u_n)}_{\lambda\times 3^n} - v_{n+2} + 4\,v_{n+1} - 4\,v_n \\ &= \lambda\,3^n - \lambda\,3^{n+2} + 4\times\lambda\,3^{n+1} - 4\times\lambda\,3^n \\ &= \lambda\times 3^n\left(1 - 3^2 + 4\times 3 - 4\right) = 0 \end{aligned}$$
• $w$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, l'équation caractéristique associée est $X^2 - 4\,X + 4 = 0$ qui admet une racine double égale à 2.
Les suites de $E$ vérifiant cette relation de récurrence sont donc les suites pour lesquelles il existe 2 constantes réelles $\alpha$ et $\beta$ telles que l'on ait : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \alpha\,2^n + \beta\,n\,2^n$

(c) Soit $u \in \mathrm{Ker}(T)$ ; $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 4\,u_{n+1} + 4\,u_n = \lambda\,3^n$ puis
$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - \lambda\,3^n = \alpha\,2^n + \beta\,n\,2^n$. Finalement
$u \in \mathrm{Ker}(T) \iff \exists (\lambda,\,\alpha,\,\beta) \in \mathbb{R}^3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\,3^n + \alpha\,2^n + \beta\,n\,2^n \iff u \in \mathrm{Vect}\langle A,\,B,\,C\rangle$ donc

$$\boxed{G = \mathrm{Ker}(T)}$$

5. $Z \in G$ donc il existe des constantes $(\lambda,\,\alpha,\,\beta) \in \mathbb{R}^3$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \lambda\,3^n + \alpha\,2^n + \beta\,n\,2^n$ ; or

$$\begin{cases} Z_0 = \lambda + \alpha = 0 \\ Z_1 = 3\,\lambda + 2\,\alpha + 2\,\beta = 1 \\ Z_2 = 9\,\lambda + 4\,\alpha + 8\,\beta = 1 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \lambda + \alpha = 0 & \\ \lambda + 2\,\beta = 1 & L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ 5\,\lambda + 8\,\beta = 1 & L_3 \leftarrow L_3 - 4\,L_1 \end{cases}$$

On obtient $\lambda = -3,\ \alpha = 3,\ \beta = 2$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ Z_n = -3^{n+1} + 3\times 2^n + n\,2^{n+1}}$$