## Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

## DM N°14 - A préparer pour le vendredi 18 mars 2016

## « Fonctions de Survie »

---

Soit $X$ une variable aléatoire définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant une **densité** $f$ **nulle sur** $]-\infty, 0[$ **et continue sur** $[0, +\infty[$. On note $F$ la fonction de répartition de $X$.

On désigne alors par fonction de survie de la variable $X$, la fonction $S$ définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0,\ S(x) = P(X > x) = 1 - F(x)$$

Nous supposerons en outre que $X$ **admet un espérance**.

**1.** Montrer que pour tout réel $x$ positif : $0 \leq x\, S(x) \leq \displaystyle\int_x^{+\infty} t\, f(t) dt$.

**2.** Préciser alors la limite de $x\, S(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$, puis en déduire la propriété suivante :

$$\forall x \geq 0,\ \int_x^{+\infty} (t - x)\ f(t) dt = \int_x^{+\infty} S(t) dt \qquad (1)$$

**3.** Soit $x$ un réel positif tel que $S(x) > 0$.

(a) Déterminer la fonction de répartition $F_X^{[X>x]}$ de $X$ conditionnée par l'événement $[X > x]$ .

*En d'autres termes, déterminer pour tout $t$ réel $P\big(X \leq t \,/\, X > x\big)$*

(b) En déduire une densité $f_X^{[X>x]}$ de la variable $X$ conditionnée par l'événement $[X > x]$.

(c) On désigne par $E_{X>x}(X - x)$ l'espérance conditionnée par l'événement $[X > x]$ de la variable $X - x$.

Prouver que : $E_{X>x}(X - x) = \dfrac{1}{S(x)} \displaystyle\int_x^{+\infty} S(t) dt$

*Indication : vous pouvez utiliser le théorème de transfert et le résultat obtenu en (1)*

**4.** Soit $g$ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, strictement positive et dérivable.

(a) Montrer que les fonctions $S$ définies et continues sur $[0, +\infty[$ telles que, pour tout $x$ positif, $g(x) = \frac{1}{S(x)} \int_x^{+\infty} S(t) dt$, vérifient l'équation différentielle :

$$S'(x) g(x) = -S(x) \times \Big(1 + g'(x)\Big)$$

(b) Déterminer, quand cela est possible, les fonctions de survie de la variable $X$ dans chacune des situations suivantes :

- $\forall x > 0\,,\ E_{X>x}(X - x) = a$
- $\forall x > 0\,,\ E_{X>x}(X - x) = a + x$
- $\forall x > 0\,,\ E_{X>x}(X - x) = \frac{1}{a+x}$

Précisez dans chacun des cas les densités obtenues.