Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°5 - A remettre le lundi 2 novembre 2015

« Algèbre Linéaire – Équations différentielles »

EXERCICE

Notations
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de **dimension 4** dont une base est $\mathscr{B} = \langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4} \rangle$ et soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -9 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Calculez le carré et le cube de la matrice A.
2. Donner une base des espaces vectoriels $\operatorname{Im} f^2$ et $\operatorname{Ker} f^2$.
3. Donner un vecteur $\overrightarrow{\ell}$ de $\operatorname{Ker} f$, non colinéaire à $f^2(\overrightarrow{e_1})$.
   Justifier que la famille $\mathscr{B}' = \left\langle \overrightarrow{e_1}, f(\overrightarrow{e_1}), f^2(\overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{\ell} \right\rangle$ est une base de E.
4. Prélever dans la famille $\left\langle \overrightarrow{e_1}, f(\overrightarrow{e_1}), f^2(\overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{\ell} \right\rangle$ une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.
5. Donner la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
6. Combien vaut la matrice $P^{-1}AP$? (*Nota Bene : cette question ne nécessite aucun calcul !*)

PROBLÈME

On note $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On note D l'application définie sur $\mathbb{E}$, et à valeurs dans $\mathbb{E}$, qui à toute fonction f de $\mathbb{E}$ associe $D(f) = f'$, sa dérivée, ainsi que Id l'identité de $\mathbb{E}$, vérifiant $\mathrm{Id}(f) = f$ pour toute application f de $\mathbb{E}$.
Dans la suite du problème α désigne un réel non nul et on note $\mathbb{F}_\alpha$, l'ensemble des fonctions de $\mathbb{E}$ de la forme

$$x \mapsto P(x)e^{\alpha x} + Q(x)e^{-\alpha x}$$

où P et Q sont des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 1. On note Id_α, l'application identique sur $\mathbb{F}_\alpha$.

1. (a) Montrer que $\mathbb{F}_\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.
   (b) On considère les fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto e^{\alpha x}, \quad f_2 : x \mapsto xe^{\alpha x}, \quad f_3 : x \mapsto e^{-\alpha x}, \quad f_4 : x \mapsto xe^{-\alpha x}$$

   Montrer que la famille $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de $\mathbb{F}_\alpha$.

2. On note D_α, la restriction de D à $\mathbb{F}_\alpha$, c'est à dire l'application définie sur $\mathbb{F}_\alpha$, qui à toute fonction f de $\mathbb{F}_\alpha$ associe $D_\alpha(f) = f'$, sa dérivée.

(a) Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{E}$. Déterminer son noyau et son image.

(b) Montrer que D_α est un endomorphisme de $\mathbb{F}_\alpha$.

(c) Déterminer M_α, la matrice de D_α dans la base $\mathscr{B}$.

(d) Montrer que la matrice M_α est inversible.

3. Soit λ un réel. Déterminer en fonction de λ le rang de l'endomorphisme $D_\alpha^2 - \lambda \mathrm{Id}_\alpha$.

4. (a) Déterminer une base du noyau de $D_\alpha^2 - \alpha^2 \mathrm{Id}_\alpha$ et une base de l'image de $D_\alpha^2 - \alpha^2 \mathrm{Id}_\alpha$.

(b) Déduire de 4.a. que pour tout f de $\mathbb{F}_\alpha$, on a l'égalité :

$$\left(D_\alpha^2 - \alpha^2 \mathrm{Id}_\alpha\right)^2 (f) = 0$$

(c) Montrer que $D_\alpha^4 - 2\alpha^2 D_\alpha^2 + \alpha^4 \mathrm{Id}_\alpha = 0$ et en déduire D_α^{-1}.

5. (a) On se place désormais dans $\mathbb{E}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y''(x) - \alpha^2 y(x) = 0$$

(b) Déterminer le noyau de $D^2 - \alpha^2 \mathrm{Id}$.

(c) Montrer que pour toute application f appartenant au noyau de $\left(D^2 - \alpha^2 \mathrm{Id}\right)^2$, il existe un couple de réels, (λ_1, λ_3), tel que $(D^2 - \alpha^2 \mathrm{Id})(f) = \lambda_1 f_1 + \lambda_3 f_3$, puis que l'application

$$g = f - \frac{\lambda_1}{2\alpha} f_2 + \frac{\lambda_3}{2\alpha} f_4$$

appartient au noyau de $D^2 - \alpha^2 \mathrm{Id}$. En déduire le noyau de $\left(D^2 - \alpha^2 \mathrm{Id}\right)^2$.

6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y^{(4)}(x) - 2\alpha^2 y''(x) + \alpha^4 y(x) = 0$$

où l'on note $y^{(4)}$ la dérivée quatrième de la fonction $x \mapsto y(x)$.

7. Soit $\mathscr{E}$ l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y^{(4)}(x) - 2y''(x) + y(x) = x^3 - 12x + 2$$

(a) Montrer que $\mathscr{E}$ possède une solution polynomiale et la déterminer. On notera par la suite f_0 cette solution polynomiale.

(b) Soit f une solution de $\mathscr{E}$; montrer que $f - f_0$ est un élément du noyau de $\left(D^2 - \mathrm{Id}\right)^2$ et en déduire l'ensemble des solutions de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}$.