Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°1 - A remettre le mercredi 23 Septembre 2015

« **Suites & Valeurs approchées** »

Partie A

Soit f la fonction de variable réelle définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

1. Étudier f et donner l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

2. On désigne respectivement par g et h les restrictions de f aux intervalles $I = \left]1, e\right]$ et $J = \left[e, +\infty\right[$.

(a) Montrer que g (respectivement h) réalise une bijection de I (respectivement J) sur un intervalle K à déterminer.

(b) Nous désignerons par h^{-1} la réciproque de la bijection de J sur K réalisée par h et par φ l'application composée $h^{-1} \circ g$.
Justifier que φ est une bijection continue de I vers J, qu'elle est dérivable sur $\left]1, e\right[$ et que :

$$\forall x \in \left]1, e\right[,\ \varphi'(x) = \left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)^2 \times \frac{\ln x - 1}{\ln(\varphi(x)) - 1}$$

3. Soit A l'ensemble des couples (x, y) de réels strictement positifs vérifiant : $\left\{\begin{array}{c} x < y \\ f(x) = f(y) \end{array}\right.$.

(a) Démontrer que $(x, \varphi(x))$ décrit A quand x décrit $\left]1, e\right[$.

(b) En déduire que $(2, 4)$ est l'unique couple $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$ vérifiant : $\left\{\begin{array}{c} n < p \\ n^p = p^n \end{array}\right.$.

4. On se propose maintenant d'étudier la dérivabilité de φ en e.

(a) Soient α et β les fonctions définies sur I par :

$$\forall x \in I,\ \alpha(x) = \frac{e^2}{x} \quad et \quad \beta(x) = \frac{x}{(\ln x)^2}$$

Étudier les variations de α et β et montrer que leurs courbes représentatives dans un même repère admettent la même demi-tangente au point d'abscisse e.
Donner (sur une même figure) l'allure générale de ces deux courbes.

(b) Démontrer que pour tout x de I : $\displaystyle\int_x^{\varphi(x)} f(t)\ \mathrm{d}t \geq (\varphi(x) - x)\ f(x)$.
Expliciter $\int_x^{\varphi(x)} f(t)\ \mathrm{d}t$ puis en déduire que : $\forall x \in I,\ \alpha(x) \leq \varphi(x)$.

(c) Démontrer que pour tout x de $\left]1, e\right[$: $f(\beta(x)) < f(x)$.
En déduire que : $\forall x \in \left]1, e\right[,\ \varphi(x) \leq \beta(x)$.

(d) Montrer (en utilisant 4a, 4b et 4c) que φ est dérivable en e et donner $\varphi'(e)$.
En déduire que $\displaystyle\lim_{\substack{x \to e \\ x < e}} \frac{\ln(\varphi(x)) - 1}{x - e} = -\frac{1}{e}$ puis, que φ' est continue en e.
Donner l'allure générale de la courbe représentative de φ dans un repère orthonormé.

Partie B

Dans cette partie a désigne un réel fixé de l'intervalle $\left]1, e\right[$.
On se propose d'étudier des suites convergeant vers $\varphi(a)$.

1. Soit λ la fonction de variable réelle définie par : $\lambda(x) = \dfrac{\ln x}{f(a)}$ et C_λ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

(a) Donner les images par λ des intervalles $]0,a[$, $]a,\varphi(a)[$ et $]\varphi(a),+\infty[$ .et étudier le signe de $\lambda(x)-x$ sur chacun de ces intervalles. Justifier que $\frac{1}{f(a)}<\varphi(a)$.

(b) Tracer C_λ dans le cas $a=2$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\lambda(u_n)$ et $u_0=\beta(a)$.

(a) Montrer que la suite (u_n) prend ses valeurs dans $]\varphi(a),+\infty[$.

(b) Démontrer que cette suite est strictement décroissante et converge vers $\varphi(a)$.

3. Soit x_0 un réel de $\left]\frac{1}{f(a)},+\infty\right[$ et T_{x_0} la tangente à C_λ au point d'abscisse x_0.

(a) Démontrer que T_{x_0} et la droite d'équation $y=x$ sont sécantes.
Calculer l'abscisse de leur point d'intersection en fonction de x_0.
Représenter T_6 sur la figure demandée en B-1b.

(b) Soit μ l'application définie sur $\left]\dfrac{1}{f(a)},+\infty\right[$ définie par :

$$\mu(x)=\frac{x(\ln x-1)}{xf(a)-1}$$

Étudier les variations de μ et donner l'image par μ de l'intervalle $\left]\dfrac{1}{f(a)},+\infty\right[$.

(c) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}=\mu(v_n)$ et $v_0=\beta(a)$.
Démontrer que cette suite est strictement décroissante et converge vers $\varphi(a)$.

4. On veut maintenant comparer les convergences des suites (u_n) et (v_n) .

(a) Pour $a=2$, évaluer à l'aide de votre calculatrice les six premières valeurs des suites (u_n) et (v_n) .

(b) Soient les suites (x_n) et (y_n) définies par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ x_n=\frac{u_{n+1}-\varphi(a)}{u_n-\varphi(a)}\quad\text{et}\quad y_n=\frac{v_{n+1}-\varphi(a)}{v_n-\varphi(a)}$$

- Démontrer que (x_n) et (y_n) convergent respectivement vers $\dfrac{1}{\ln\varphi(a)}$ et 0.
- En déduire la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_n=\dfrac{v_n-\varphi(a)}{u_n-\varphi(a)}$ converge. Donner sa limite.
- Interpréter en terme de rapidité de convergence.

Partie C

Dans cette partie a désigne un réel fixé de l'intervalle $]1,e[$.

1. Écrire les scripts en Python des fonctions λ et μ de paramètre a.

2. Écrire ensuite le script d'une fonction dont les arguments d'entrée sont a et n qui :
- permet de visualiser le graphe de λ
- permet de visualiser la droite d'équation $y=x$
- permet de visualiser les n premiers termes de la suite (u_n)
- retourne la liste des n premiers termes de la suite (u_n) .

3. Ecrire ensuite le script d'une fonction dont les arguments d'entrée sont a et n qui :
- permet de visualiser le graphe de μ
- permet de visualiser la droite d'équation $y=x$
- permet de visualiser les n premiers termes de la suite (v_n)
- retourne la liste des n premiers termes de la suite (v_n) .

4. Utiliser les fonctions précédentes pour déterminer des valeurs approchées des solutions de l'équation $\left(\frac{3}{2}\right)^x=x\sqrt{x}$.