**MATHÉMATIQUES**
ÉPREUVE A

Durée : 3 heures 30 minutes

***L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.***
*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

## Problème I

### 1. Un exemple d'une réduction simultanée d'une famille de matrices

Pour tout triplet $(a,b,c)$ appartenant à $\mathbb{R}^3$, nous noterons $M(a,b,c)$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

Nous noterons $I = M(1,0,0)$ la matrice unité, $J = M(0,1,0)$ et $K = M(0,0,1)$.

**1.1** Sans aucun calcul, montrer que $J$ et $K$ sont diagonalisables.

**1.2 Recherche des éléments propres de K**

**1.2.1** Déterminer les valeurs propres de $K$.

**1.2.2** Pour chaque valeur propre de $K$, déterminer une base du sous-espace propre associé.
*Les vecteurs intervenant seront choisis de troisième composante égale à* 1.

**1.3 Recherche des éléments propres de J**

**1.3.1** Déterminer les valeurs propres de $J$.

**1.3.2** Pour chaque valeur propre de $J$, déterminer une base du sous-espace propre associé.

**1.4 Recherche de vecteurs propres communs à J et K**

**1.4.1** Montrer que : $Vect\left((1,0,1),(0,1,0)\right) = Vect\left(\left(1,\sqrt{2},1\right),\left(1,-\sqrt{2},1\right)\right)$.

**1.4.2** En déduire une matrice $P$ inversible appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}KP$ et $P^{-1}JP$ soient diagonalisables.
*La dernière ligne de $P$ sera constituée uniquement de* 1.

**1.5** En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ permettant pour tout $(a,b,c)$ appartenant à $\mathbb{R}^3$, de diagonaliser la matrice $M(a,b,c)$ et donner une matrice diagonale $D$ semblable à $M(a,b,c)$.

### 2. Réduction simultanée de deux matrices dans le cas général

Considérons deux matrices $A$ et $B$ appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Dans toute cette question on suppose que $A$ et $B$ sont diagonalisables et que : $AB = BA$.

$(E,+,\cdot)$ désigne un espace vectoriel réel de dimension 3, $\varepsilon = (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ désigne une base de $E$.

Considérons les endomorphismes $f$ et $g$ de $E$ définis par : $\begin{cases} Mat\,(f,\varepsilon) = A \\ Mat\,(g,\varepsilon) = B \end{cases}$.

$\mu$ étant une valeur propre de $f$, $E_\mu(f)$ désigne le sous-espace propre de $f$ associé à la valeur propre $\mu$ de $f$.
$\lambda$ étant une valeur propre de $g$, $E_\lambda(g)$ désigne le sous-espace propre de $g$ associé à la valeur propre $\lambda$ de $g$.

**2.1** $\lambda$ étant une valeur propre de $g$, $\overrightarrow{x}$ appartenant à $E_\lambda(g)$, montrer que :

$$g\left(f\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = \lambda f\left(\overrightarrow{x}\right),$$

et en déduire que $f\left(\overrightarrow{x}\right)$ appartient à $E_\lambda(g)$.

**2.2** Nous supposons dans cette question que $B$ admet une unique valeur propre $\lambda$.

**2.2.1** Montrer que : $B = \lambda I_3$, $I_3$ représentant la matrice identité.

**2.2.2** Justifier alors l'existence d'une matrice $P$ inversible appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que les matrices $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

**2.3** Nous supposons dans cette question que $B$ admet trois valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

**2.3.1** $\lambda$ étant une valeur propre de $B$, quelle est la dimension de $E_\lambda(g)$?

**2.3.2** $\lambda$ étant une valeur propre de $B$, $\overrightarrow{x}$ un vecteur non nul appartenant à $E_\lambda(g)$, montrer qu'il existe un réel $\mu$ tel que : $f\left(\overrightarrow{x}\right) = \mu\overrightarrow{x}$.

**2.3.3** Montrer alors l'existence d'une base de $E$ constituée de vecteurs propres communs à $f$ et $g$.

**2.4** Nous supposons dans cette question que $B$ admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2$.

**2.4.1** Montrer que : Montrer que $E_{\lambda_1}(g) \cap E_{\lambda_2}(g) = \{\vec{0}\}$ et que tout vecteur de $\vec{y}$ de $E$ peut s'écrire de façon unique $\vec{y} = \vec{y_1} + \vec{y_2}$ avec $\vec{y_1} \in E_{\lambda_1}(g)$ et $\vec{y_2} \in E_{\lambda_2}(g)$.

**2.4.2** $\mu$ désigne une valeur propre de $f$.
Soit $\overrightarrow{x}$ appartenant à $E_\mu(f)$, justifier l'existence de $\overrightarrow{x}_1$ appartenant à $E_{\lambda_1}(g)$ et de $\overrightarrow{x}_2$ appartenant à $E_{\lambda_2}(g)$ tels que : $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}$, puis montrer que $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{x_2}$ appartiennent à $E_\mu(f)$.

**2.4.3** $\mu$ désigne toujours une valeur propre de $f$.
Montrer l'existence d'une base de $E_\mu(f)$ constituée de vecteurs propres de $g$.

**2.4.4** En déduire l'existence d'une base de $E$ constituée de vecteurs propres communs à $f$ et $g$.

## Problème II : Vers la formule de Stirling

### 1. Intégrales de Wallis

Dans ce problème, pour tout entier naturel $n$, nous noterons : $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n \,\mathrm{d}\theta$.

**1.1** Calculer $W_0$ et $W_1$.

**1.2** Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n$ :

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

**1.3** En déduire que pour tout entier naturel $n$ : $(n+1)W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

**1.4** Montrer que pour tout entier naturel $n$ : $W_n \geq W_{n+1} \geq W_{n+2} > 0$,

et en déduire la limite lorsque $n$ tends vers $+\infty$, du rapport $\dfrac{W_n}{W_{n+1}}$.

**1.5** Déduire des questions précédentes que : $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Nous admettrons dans la suite du problème que pour toute fonction $u : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et ne s'annulant pas en $0$ : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(\theta)\left(\cos(\theta)\right)^n \mathrm{d}\theta \underset{n\to+\infty}{\sim} u(0)W_n$.

## 2. Étude d'une suite

Considérons la suite $u$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 - e^{-n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$.

### 2.1 Limite de la suite u

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la même loi de Poisson de paramètre 1.

**2.1.1** $n$ désignant un entier naturel non nul, quelle est la loi de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ ? Quelle est la valeur de $P(S_n \leq n)$?

**2.1.2** À l'aide du théorème de la limite centrée, que peut-on dire de la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_n = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ ?

**2.1.3** En déduire que la suite $u$ converge vers $\frac{1}{2}$.

### 2.2 Expression intégrale du terme général de la suite u

**2.2.1** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t.$$

**2.2.2** En déduire par un changement de variable, que pour tout entier naturel $n$ :

$$u_n = \int_0^n \frac{s^n}{n!} e^{-s} \mathrm{d}s.$$

**3. Mise en place d'un changement de variables**

Considérons la fonction $f$ définie sur $[0,1]$ par : $\forall x \in [0,1],\ f(x) = xe^{1-x}$.

**3.1** Montrer que $f$ est indéfiniment dérivable sur $[0,1]$.
En déduire l'existence d'un développement limité à tout ordre pour $f$ et $f'$ au voisinage de 1.
Calculer le développement limité à l'ordre 2 de $f$ en 1, et celui à l'ordre 1 de $f'$ en 1.
En déduire alors un équivalent simple de $1 - f(x)$ et $f'(x)$ en 1.

**3.2** Montrer que $f$ réalise une bijection du segment $[0,1]$ dans lui-même.
$f^{-1}$ désigne donc la bijection réciproque de $f$.

**3.3** Montrer que : $1 - f^{-1}(y) \underset{y \to 1^-}{\sim} \sqrt{2(1-y)}$.

**3.4** Justifier que $f^{-1}$ est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $[0,1[$, préciser une expression de $(f^{-1})'$ et montrer que $f^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.

**3.5** Montrer que la fonction $g : \theta \mapsto f'\left(f^{-1}\left(\cos(\theta)\right)\right)$ est définie et continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et déterminer un équivalent de $g$ en $0^+$.

**3.6** Montrer que la fonction $h : \theta \mapsto \dfrac{\sin(\theta)}{g(\theta)}$ est définie et continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, et est prolongeable par continuité en 0.

Dans la suite, $h$ désigne la fonction ainsi prolongée.

**4. Une autre expression du terme général de la suite u**

**4.1 Un premier changement de variable**

Montrer que pour tout entier naturel $n$ : $u_n = \dfrac{n^{n+1}e^{-n}}{n!} \displaystyle\int_0^1 \left(te^{-t}\right)^n \mathrm{d}t$.

**4.2 Un second changement de variable plus délicat**

$n$ désigne un entier naturel non nul,
notons pour tout réel $x$ appartenant à $[0,1]$ : $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(te^{1-t}\right)^n \mathrm{d}t$.

**4.2.1** Que représente la fonction $F$ ?
En déduire que $F$ est en particulier continue en 1.

**4.2.2** À l'aide du changement de variable $t = f^{-1}\left(\cos(\theta)\right)$, $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, montrer que pour tout réel $x$ appartenant à $[0,1[$ : $F(x) = \displaystyle\int_{\mathrm{Arccos}(f(x))}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(\theta)\right)^n h(\theta)\mathrm{d}\theta$.
*Les fonctions $f$ et $h$ ont été définies à la question* 3.

**4.2.3** En déduire que : $\displaystyle\int_0^1 \left(te^{1-t}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(\theta)\right)^n h(\theta)\mathrm{d}\theta$,

puis que : $u_n = \dfrac{n^{n+1}e^{-n}}{n!} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(\theta)\right)^n h(\theta)\mathrm{d}\theta$.

**5. Enfin la formule de Stirling**

Montrer que : $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

FIN DE L'ÉPREUVE