Corrigé du devoir maison n^o 8

EXERCICE

1. Soit $f \in E$ donnée ; déterminer une fonction y vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) + y(x) = f(x) \quad$ et $\quad y(0) = 0 \quad (\star)$ revient à résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre à cœfficients constants avec condition particulière. Une solution de cette équation peut se chercher sous la forme $x \mapsto \alpha(x)\, e^{-x}$ où α est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Par identification on obtient : $\alpha'(x)\, e^{-x} = f(x)$ ou encore $\alpha'(x) = e^x\, f(x)$. La fonction $x \mapsto e^x\, f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives. Ainsi il existe des fonctions de E solutions de $(\star)$. L'unicité résulte d'un théorème de cours : si y_1 et y_2 sont 2 solutions, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(y_1'(x) - y_2'(x)\big)(x) + \big(y_1(x) - y_2(x)\big)(x) = 0$ et $y_1(0) - y_2(0) = 0$; $y_1 - y_2$ est de la forme $x \mapsto K\, e^{-x}$ où K est un réel, et comme $y_1 - y_2$ s'annule en 0, on déduit $K = 0$ d'ou $y_1 = y_2$ sur $\mathbb{R}$.

2. L'unicité de $u(f)$ pour $f \in E$ donnée entraine que l'on peut effectivement définir l'application u sur E.

   (a) — Linéarité de u : soient f et g deux fonctions de E et $\lambda \in \mathbb{R}$
   $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda\, \big(u(f)\big)'(x) + \lambda\, u(f)(x) = \lambda\, f(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \big(u(g)\big)'(x) + u(g)(x) = g(x)$
   Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \Big(\lambda\, u(f) + u(g)\Big)'(x) + \Big(\lambda\, u(f) + u(g)\Big)(x) = \lambda\, f(x) + g(x)$, de plus $u\big(\lambda\, f + g\big)(0) = 0$ et $\lambda\, u(f)(0) + u(g)(0) = 0$. Ainsi $u\big(\lambda\, f + g\big) = \lambda\, u(f) + u(g)$.

   — Injectivité de u : soit $f \in E,\ f \in \ker(u) \iff u(f) = 0$ (fonction nulle sur $\mathbb{R}$) c'est à dire l'équation différentielle $(\star)$ a comme unique solution sur $\mathbb{R}$ la fonction nulle. Or, d'après la première question, une fonction solution est de la forme $x \mapsto \alpha(x)\, e^{-x}$ avec α une primitive de $x \mapsto e^x\, f(x)$.
   Comme l'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, si la seule solution est la fonction nulle, c'est que la fonction α est la fonction nulle, donc sa dérivée aussi ; ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x\, f(x) = 0$ et en multipliant par e^{-x} : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$. On a bien montré que $\Big(\ u(f) = 0\Big) \Rightarrow \Big(\ f = 0\Big)$ c'est à dire $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$.

   (b) L'expression de $u(f)$ montre que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, or il existe dans E des fonctions non dérivables (la valeur absolue par exemple) qui n'ont donc pas d'antécédent par u ; ainsi $\boxed{u \text{ n'est pas surjectif}}$

   (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, λ est une valeur propre de u s'il existe $f \in E$ non nulle telle que $u(f) = \lambda\, f$ c'est à dire $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda\, f'(x) + \lambda\, f(x) = f(x)$ et $f(0) = 0$
   — Si $\lambda = 0$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$, donc 0 n'est pas valeur propre.
   — Sinon on a une équation différentielle linéaire sans second membre à cœfficients constants :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}\, f(x) = 0$ et $f(0) = 0$ La solution est $f\ : x \mapsto K\, e^{\frac{1-\lambda}{\lambda} x}$ avec $f(0) = K = 0$; donc $\boxed{u \text{ n'a aucune valeur propre ni espace propre}}$
   Variante : Si on remplace la condition par $y(0) = f(0)$, on obtient $\lambda = 1$ et $f\ : x \mapsto f(0)$ est une fonction constante. Donc u admet une unique valeur propre, 1 et E_1 est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

PROBLÈME

Première partie

1. $z = 0$ n'est pas solution de l'équation, on peut donc poser $z = r\, e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On obtient : $r^4\, e^{i\, 4\, \theta} = 1\, e^{i\, 0}$ d'où $r = 1$ et $\theta = 0 + \dfrac{2\, k\, \pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$. Pour obtenir toutes les solutions, il suffit de choisir 4 valeurs consécutives de k, par exemple de 0 à 3. Finalement l'ensemble des solutions est $\{1,\ i,\ -1,\ -i\}$.
   Remarque : on pouvait aussi écrire $z^4 = 1 \iff z^4 - 1 = 0 = (z^2 - 1)\,(z^2 + 1) = (z - 1)\,(z + 1)\,(z - i)\,(z + i)$.
   $$\boxed{z^4 = 1 \iff z \in \{1,\ i,\ -1,\ -i\}}$$

2. (a) $\lambda \in \mathbb{C} \in \mathrm{Spec}(g)$ si et seulement si $g - \lambda\, \mathrm{id}$ n'est pas injectif, ou encore si $J - \lambda\, I$ est de rang inférieur ou égal à 3. Soit $\lambda \neq 0$:

$$J-\lambda I=\begin{pmatrix}-\lambda&1&0&0\\0&-\lambda&1&0\\0&0&-\lambda&1\\1&0&0&-\lambda\end{pmatrix}\ L_4\leftarrow\lambda L_4+L_1\quad\sim\begin{pmatrix}-\lambda&1&0&0\\0&-\lambda&1&0\\0&0&-\lambda&1\\0&1&0&-\lambda^2\end{pmatrix}\ L_4\leftarrow\lambda L_4+L_2\quad\sim$$

$$\begin{pmatrix}-\lambda&1&0&0\\0&-\lambda&1&0\\0&0&-\lambda&1\\0&0&1&-\lambda^3\end{pmatrix}\ L_4\leftarrow\lambda L_4+L_3\quad\sim\begin{pmatrix}-\lambda&1&0&0\\0&-\lambda&1&0\\0&0&-\lambda&1\\0&0&0&1-\lambda^4\end{pmatrix}.$$

Donc pour $\lambda\neq 0$, $J-\lambda I$ est de rang 4 (colonnes échelonnées) si et seulement si $1-\lambda^4\neq 0$; pour $\lambda=0$ J est de rang 4 (il suffit de permuter L_1 et L_4 pour retrouver la matrice I).
Ainsi $\mathrm{rg}(J-\lambda I)<4\iff\lambda\in\{1,\,i,\,-1,\,-i\}$

$$\boxed{\mathrm{Spec}(J)=\mathrm{Spec}(g)=\{1,\,i,\,-1,\,-i\}}$$

(b) Pour $\lambda\in\{1,\,i,\,-1,\,-i\}$ et $X={}^t\,(x,y,z,t)$ on résout $(J-\lambda I)\,X=0$

- $\underline{\lambda=1}$ $\left\{\begin{array}{rcl}-x+y&=&0\\-y+z&=&0\\-z+t&=&0\end{array}\right.\iff x=y=z=t$ $\quad\boxed{E_1=\mathrm{Vect}\langle(1,1,1,1)\rangle}$
- $\underline{\lambda=i}$ $\left\{\begin{array}{rcl}-i\,x+y&=&0\\-i\,y+z&=&0\\-i\,z+t&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}y&=&i\,x\\z&=&-x\\t&=&-i\,x\end{array}\right.$ $\quad\boxed{E_i=\mathrm{Vect}\langle(1,i,-1,-i)\rangle}$
- $\underline{\lambda=-1}$ $\left\{\begin{array}{rcl}x+y&=&0\\y+z&=&0\\z+t&=&0\end{array}\right.\iff y=t=-x=-z$ $\quad\boxed{E_{-1}=\mathrm{Vect}\langle(1,-1,1,-1)\rangle}$
- $\underline{\lambda=-i}$ $\left\{\begin{array}{rcl}i\,x+y&=&0\\i\,y+z&=&0\\i\,z+t&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}y&=&-i\,x\\z&=&-x\\t&=&i\,x\end{array}\right.$ $\quad\boxed{E_{-i}=\mathrm{Vect}\langle(1,-i,-1,i)\rangle}$

(c) g admet 4 valeurs propres distinctes, donc $\boxed{g\text{ est diagonalisable}}$

3. (a) $J^0=I,\ J^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\ J^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$, donc $M_A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\a_4&a_1&a_2&a_3\\a_3&a_4&a_1&a_2\\a_2&a_3&a_4&a_1\end{pmatrix}$

(b) M_A est combinaison linéaire de I, J, J^2 et J^3 ; or M_A est la matrice de l'endomorphisme f_A dans la base $\mathcal{B}$, J est la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$, de même pour J^k, $1\leqslant k\leqslant 3$. Ainsi f_A est combinaison linéaire (avec les mêmes cœfficients que M_A) de id, g, $g\circ g$ et $g\circ g\circ g$.

(c) Notons ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 les vecteurs de base déterminés précédemment de E_1, E_i, E_{-1}, E_{-i} respectivement.
$g(\varepsilon_1)=g\circ g(\varepsilon_1)=g\circ g\circ g(\varepsilon_1)=\varepsilon_1,\quad g(\varepsilon_2)=i\,\varepsilon_2,\ g\circ g(\varepsilon_2)=-\varepsilon_2,\ g\circ g\circ g(\varepsilon_2)=-i\,\varepsilon_2$
$g(\varepsilon_3)=-\varepsilon_3,\ g\circ g(\varepsilon_3)=\varepsilon_3,\ g\circ g\circ g(\varepsilon_3)=-\varepsilon_3$ et $g(\varepsilon_4)=-i\,\varepsilon_4,\ g\circ g(\varepsilon_4)=-\varepsilon_4,\ g\circ g\circ g(\varepsilon_4)=i\,\varepsilon_4$
$f_A(\varepsilon_1)=a_1\,\varepsilon_1+a_2\,g(\varepsilon_1)+a_3\,g\circ g(\varepsilon_1)+a_4\,g\circ g\circ g(\varepsilon_1)=(a_1+a_2+a_3+a_4)\,\varepsilon_1$
$f_A(\varepsilon_2)=a_1\,\varepsilon_2+a_2\,g(\varepsilon_2)+a_3\,g\circ g(\varepsilon_2)+a_4\,g\circ g\circ g(\varepsilon_2)=(a_1+i\,a_2-a_3-i\,a_4)\,\varepsilon_2$
$f_A(\varepsilon_3)=a_1\,\varepsilon_3+a_2\,g(\varepsilon_3)+a_3\,g\circ g(\varepsilon_3)+a_4\,g\circ g\circ g(\varepsilon_3)=(a_1-a_2+a_3-a_4)\,\varepsilon_3$
$f_A(\varepsilon_4)=a_1\,\varepsilon_4+a_2\,g(\varepsilon_4)+a_3\,g\circ g(\varepsilon_4)+a_4\,g\circ g\circ g(\varepsilon_4)=(a_1-i\,a_2-a_3+i\,a_4)\,\varepsilon_4$

(d) La famille $(\varepsilon_1,\,\varepsilon_2,\,\varepsilon_3,\,\varepsilon_4)$ est une base de vecteurs propres de g, on constate qu'elle est aussi une base de vecteurs propres de f_A, les valeurs propres associées étant $a_1+a_2+a_3+a_4$, $a_1+i\,a_2-a_3-i\,a_4$, $a_1-a_2+a_3-a_4$ et $a_1-i\,a_2-a_3+i\,a_4$. Dans cette base, la matrice de f_A est donc semblable à

$$\begin{pmatrix}a_1+a_2+a_3+a_4&0&0&0\\0&a_1+ia_2-a_3-ia_4&0&0\\0&0&a_1-a_2+a_3-a_4&0\\0&0&0&a_1-ia_2-a_3+ia_4\end{pmatrix}$$

4. (a) On remarque que $M(z)=M_A$ avec $A=\begin{pmatrix}z\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, donc d'après la question 3d, ses valeurs propres sont $z+3$ et $z-1$; $z-1$ est valeur propre triple.

(b) $M(z)$ est inversible si 0 n'est pas valeur propre,d'où $\boxed{M(z) \text{ est inversible } \iff z \notin \{1,-3\}}$

(c) $M(1)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4\,M(1)$, donc par récurrence $\forall k \geqslant 1,\ M(1)^k = 4^{k-1}\,M(1)$

$M(z)-M(1) = (z-1)\,I$, donc $\big(M(z)-M(1)\big)^k = (z-1)^k\,I$; et comme $M(z)-M(1)$ et $M(1)$ commutent, on déduit :

$$[M(z)]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M(1)^k \left(M(z)-M(1)\right)^{n-k} = I \times \left(M(z)-M(1)\right)^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^{k-1}\,M(1)\,(z-1)^{n-k}\,I$$

$$= (z-1)^n\,I + \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k\,(z-1)^{n-k}\right) M(1) = (z-1)^n\,I + \frac{1}{4}\left((z+3)^n - (z-1)^n\right) M(1)$$

$$\boxed{[M(z)]^n = \frac{(z+3)^n}{4}\,M(1) + (z-1)^n\Big(I - \frac{1}{4}\,M(1)\Big)}$$

5. Algorithmes en Python :

(a)
```
def Produit(A,B):
    C=zeros((4,4))
    for i in range(4):
        for j in range(4):
            for k in range(4):
                C[i,j]+=A[i,k]*B[k,j]
    return C
```
Pour chaque coefficient du produit (16 en tout) il faut 4 produits et 3 additions, soit au total 48 additions et 64 produits.

(b)
```
def Puissance(A,n):
    C=eye(4)
    for k in range(n):
        C=Produit(C,A)
    return C
```
On effectue $n-1$ produits matriciels, soit $48\,n$ additions et $64\,n$ produits.

(c)
```
def PuissanceZ(z,n):
    M1=ones((4,4)); I=eye(4)
    C=0.25*(z+3)**n*M1+(z-1)**n*(I-0.25*M1)
    return C
```
On a une somme (donc une addition) de deux expressions :
Pour la partie gauche : une addition $(z+3)$ puis n produits (puissance n et produit par $0,25$) et enfin 16 produits (multiplication par les coefficients de $M(1)$).
Pour la partie droite : 16 produits ($-0,25$ par les coefficients de $M(1)$), 16 additions (somme des deux matrices), puis 1 addition $(z-1)$ et $16+(n-1)$ produits.
Donc au total, 19 additions et $2\,n+47$ produits.

Deuxième partie

1. Soit P un élément de E, c'est à dire une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 3,
$x \longmapsto P'(0) - \dfrac{P'''(0)}{6} + x\left(\dfrac{P''(0)}{2} - P(0)\right)$ est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 1, donc $h(P)$ est de degré inférieur ou égal à 3, et h est bien à valeurs dans E.
Linéarité de h : Soient P et Q deux éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$;
$\forall x \in \mathbb{R},\ h(\lambda\, P + Q)(x) = (1 - x^2)\ \left((\lambda\, P + Q)'(0) - \dfrac{\lambda\, P + Q)'''(0)}{6} + x\Big(\dfrac{(\lambda\, P + Q)''(0)}{2} - (\lambda\, P + Q)(0)\Big)\right)$
$= \lambda\,(1 - x^2)\ \left(P'(0) - \dfrac{P'''(0)}{6} + x\Big(\dfrac{P''(0)}{2} - P(0)\Big)\right) + (1 - x^2)\ \left(Q'(0) - \dfrac{Q'''(0)}{6} + x\Big(\dfrac{Q''(0)}{2} - Q(0)\Big)\right)$
$= \lambda\, h(P)(x) + h(Q)(x)$; l'égalité est vérifiée pour tout x réel, donc h est linéaire.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ h(\varepsilon_0)(x) = -x\,(1 - x^2)$ donc $h(\varepsilon_0) = \varepsilon_3 - \varepsilon_1$
$\forall x \in \mathbb{R},\ h(\varepsilon_1)(x) = (1 - x^2)$ donc $h(\varepsilon_1) = \varepsilon_0 - \varepsilon_2$
$\forall x \in \mathbb{R},\ h(\varepsilon_2)(x) = x\,(1 - x^2)$ donc $h(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$
$\forall x \in \mathbb{R},\ h(\varepsilon_3)(x) = -\,(1 - x^2)$ donc $h(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 - \varepsilon_0$ ce qui donne pour la matrice de h dans $\mathcal{B}_1$:
$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
3. On remarque que H est de rang 2, puisque les colonnes 1 et 3 sont proportionnelles, ainsi que les colonnes 2 et 4 ; ainsi 0 est valeur propre avec un espace propre associé de dimension 2 : $\ker(h) = \mathrm{Vect}\langle \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \varepsilon_2 + \varepsilon_4 \rangle$
Pour $\lambda \neq 0$, on calcule le rang de $H - \lambda\, I$:
$$H - \lambda\, I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_1 \leftrightarrow L_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \lambda\, L_1}}{\sim}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & -\lambda^2 - 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \lambda\, L_2 \\ L_4 \leftarrow L_2 + L_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & -2\lambda \\ 0 & 0 & -2\lambda & -\lambda^2 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow \lambda\, L_4 + 2\, L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & -2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^3 - 4\lambda \end{pmatrix}$$
$-\lambda^3 - A\,\lambda = -\lambda\,(\lambda^2 + 4)$ On constate que pour $\lambda \neq 0$, la matrice est de rang 4, donc il n'y a pas d'autre valeur propre réelle que 0. *Par contre il y a aussi deux valeurs propres complexes conjuguées :* $2\,i$ *et* $-2\,i$.
4. Une base du noyau a déjà été trouvée à la question précédente : $\langle \varepsilon_1 + \varepsilon_3,\ \varepsilon_2 + \varepsilon_4 \rangle$; pour une base de l'image –qui est de dimension 2– il suffit de considérer deux vecteurs colonnes non colinéaires de H, par exemple $h(\varepsilon_1) = -\varepsilon_2 + \varepsilon_4$ et $h(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$.
$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Vect}\langle \varepsilon_1 + \varepsilon_3,\ \varepsilon_2 + \varepsilon_4 \rangle \\ \mathrm{Im}(h) = \mathrm{Vect}\langle -\varepsilon_2 + \varepsilon_4,\ \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \rangle \end{array}}$$
Ce n'est pas demandé dans l'exercice, mais on peut alors écrire la matrice H' de h dans la base
$\mathcal{B}' = \langle \varepsilon_1 + \varepsilon_3,\ \varepsilon_2 + \varepsilon_4,\ -\varepsilon_2 + \varepsilon_4,\ \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \rangle$: $H' = \mathscr{M}at(h, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$