Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°7 - A rendre le lundi 5 janvier 2015

« Lois usuelles - Simulations »

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires seront définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$

PARTIE I

Nous allons ici vous présenter une méthode pour simuler une Loi de Poisson de paramètre λ.
Soit X_0, X_1, X_2, X_3, $\cdots$ une suite illimitée de variables aléatoires réelles indépendantes de Loi Uniforme sur $]0,1[$.
On pose alors $Z_n = \prod_{k=0}^{n} X_k$ et l'on désigne par N la plus petite valeur de n telle que : $Z_n \leq \exp(-\lambda)$.
Autrement dit

$$\forall \omega \in \Omega,\ N(\omega) = 0 \iff X_0 \leq \exp(-\lambda) \quad \text{et} \quad N(\omega) = n+1 \iff \begin{cases} X_0 \times \cdots \times X_n & > \exp(-\lambda) \\ X_0 \times \cdots \times X_n \times X_{n+1} & \leq \exp(-\lambda) \end{cases}$$

Nous admettrons le résultat suivant :

La variable aléatoire N ainsi construite est distribuée selon la Loi de Poisson de paramètre λ.

Nous vous proposons le script incomplet suivant :

```
from numpy import*
from random import*
from matplotlib.pyplot import*
#   *****************************LES FONCTIONS****************************
# ======================== Alea De Poisson ============================
def ALEA_POISSON(Lambda):
    ________________________
    N=0
    while ___________________:
        _______
        _____________________
    return N
# ======Insertion d'une nouvelle valeur dans une série statistique =======
# LX, LE : listes d'entiers de même longueur. X : nouvelle valeur
# LX : liste des anciennes valeurs. LE : liste des effectifs correspondants
def INSERER(LX,LE,X):
    k=0
    while k<len(LX) and X>LX[k]:
        k=k+1
    if k<len(LX) and X==LX[k]:
        LE[k]+=1
    else:
        LX.insert(k,X)
        LE.insert(k,1)
# ****************************PROGRAMME PRINCIPAL***********************
Lambda=13
Nb=100000
Somme=0;Somme_Carres=0
Liste_X=[];Liste_Effectifs=[]
for k in range(Nb):
    X=ALEA_POISSON(Lambda)
    INSERER(Liste_X,Liste_Effectifs,X)
    Somme = ______________
    Somme_Carres = ______________
MOYENNE = ______________
VARIANCE = ______________
print('La moyenne des ',str(Nb),' valeurs de X vaut '+ str(MOYENNE))
```

```
38 print('La variance des ',str(Nb),' valeurs de X vaut '+ str(VARIANCE))
39 print(transpose(array([Liste_X , Liste_Effectifs])))
```

1. Nous rappelons que `random()` est une variable pseudo-aléatoire réelle de Loi Uniforme sur $]0,1[$.
En utilisant la méthode préconisée dans l'introduction, compléter les lignes 7, 9 ,10 et 11 de ce script de sorte que l'instruction `X=ALEA_POISSON(Lambda)` affecte à `X` une valeur entière aléatoire distribuée selon la Loi de Poisson de paramètre $\lambda =$ `Lambda`.

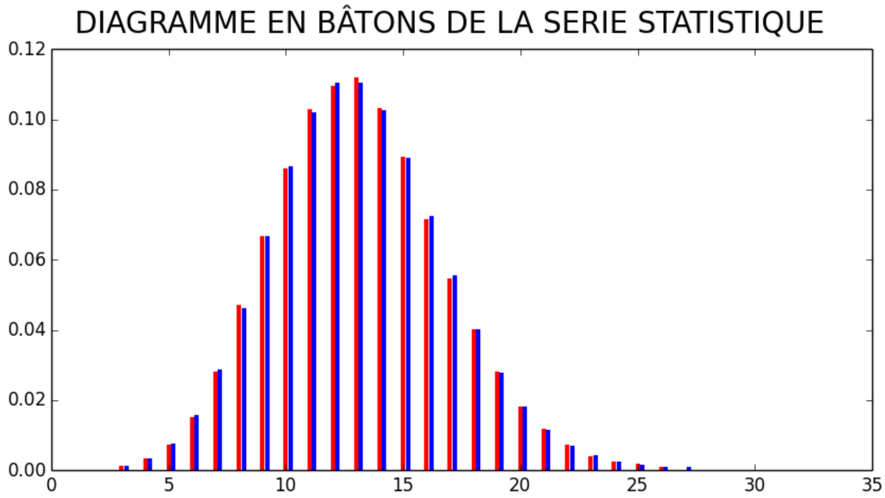
2. Compléter les lignes 33, 34, 35, 36 de sorte que soient affichées dans les lignes 37 et 38 la moyenne et la variance de l'échantillon de taille Nb = 100000 de la variable aléatoire X.

3. Après avoir rajouté au script précédent les deux lignes suivantes (que vous devrez compléter) :

```
for k in range(len(Liste_X)):
    Frequence= - - - - - - - - - - - -
    plot([Liste_X[k], Liste_X[k]],[0,---------],'r',linewidth=3)
from math import*
for k in range(len(Liste_X)):
    Proba= - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
    plot([Liste_X[k]+0.2,Liste_X[k]+0.2],[0,-----],'b',linewidth=3)
```

nous obtenons les résultats et la sortie graphique ci-jointe :

```
La moyenne des  100000  valeurs de X vaut 13.0026
La variance des  100000  valeurs de X vaut 12.925973240000019
[[    1      2]
 [    2     21]
 [    3     78]
 [    4    267]
 [    5    669]
 [    6   1459]
 [    7   2763]
 [    8   4648]
 [    9   6625]
 [   10   8550]
 [   11  10241]
 [   12  10878]
 [   13  11147]
 [   14  10273]
 [   15   8885]
 [   16   7098]
 [   17   5413]
 [   18   3946]
 [   19   2742]
 [   20   1769]
 [   21   1136]
 [   22    657]
 [   23    354]
 [   24    191]
 [   25    114]
 [   26     40]
 [   27     17]
 [   28     11]
 [   29      2]
 [   30      2]
 [   31      1]
 [   33      1]]
```



En quoi les résultats observés, même s'ils ne constituent pas une preuve, nous permettent-ils d'apprécier la méthode de simulation proposée ?

PARTIE 2

Pour tout couple (A, B) d'événements tels que : $\mathrm{P}(B) \neq 0$, nous noterons :

- $\mathrm{P}_B(A)$: la probabilité sachant B de l'événement A.

Pour tous entiers a et b, nous désignerons par :

- $[\![a, b]\!]$: l'ensemble des nombres entiers k tels que $a \leq k \leq b$.
- $[\![a, +\infty[\![$: l'ensemble des nombres entiers k tels que $a \leq k$.

Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ et tout réel t pour lequel cela à un sens, nous noterons :

- $\varphi_X(t)$: l'espérance de la variable aléatoire t^X, autrement dit :

$$\boxed{\varphi_X(t) = \mathrm{E}\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k)\, t^k}$$

La fonction φ_X est appelée fonction génératrice de la variable aléatoire X.

Nous adopterons la convention habituelle $0^0 = 1$, ce qui permet d'affirmer : $\varphi_X(0) = P(X = 0)$. On rappelle que si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes d'espérances respectives $E(U)$ et $E(V)$, alors leur produit UV admet également une espérance et $E(UV) = E(U) \times E(V)$.

1. Soit n un entier naturel quelconque et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.

(a) Montrer que φ_X est une fonction polynôme à coefficients réels.
Quel est son degré maximal ? Quelle est la valeur de $\varphi_X(1)$?

(b) Montrer que si φ_X est donnée, la loi de X est entièrement connue.

— Exprimer alors $\mathrm{P}(X = k)$ en fonction de $\varphi_X^{(k)}(0)$.
— Montrer que l'espérance de X vaut : $\mathrm{E}(X) = \varphi'_X(1)$
— Montrer que la variance de X vaut : $\mathrm{V}(X) = \varphi''_X(1) + \varphi'_X(1) - (\varphi'_X(1))^2$.

(c) On suppose dans cette question que X est distribuée selon la Loi Binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

— Déterminer la fonction génératrice de X.
— Vérifier que $\varphi_X(t)$ peut s'écrire sous la forme $(\alpha + \beta t)^n$.
— En déduire l'espérance et la variance de X.

(d) Soient n_1 et n_2 deux entiers naturels quelconques puis X et Y deux variables aléatoires à valeurs respectivement dans $[\![0, n_1]\!]$ et $[\![0, n_2]\!]$.

i. Montrer que si X et Y sont indépendantes : $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \times \varphi_Y(t)$.

ii. On suppose dans cette question que X et Y sont distribuées respectivement selon les Lois Binomiales $\mathscr{B}(n_1, p)$ et $\mathscr{B}(n_2, p)$ et sont indépendantes.

Montrer en utilisant exclusivement et dans cet ordre les questions 1c, 1(d)i, puis 1c et 1b que $X + Y$ est distribuée selon la Loi Binomiale $\mathscr{B}(n_1 + n_2, p)$.

2. Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$. Pour tout entier n, on pose $a_n = \mathrm{P}(X = n)$.

(a) Montrer que pour tout réel $t \in [-1, 1]$, la série $\sum a_n t^n$ est absolument convergente.

(b) En déduire que φ_X est au moins définie sur le segment $[-1, 1]$ et donner la valeur de $\varphi_X(1)$.

(c) Déterminer $\varphi_X(t)$ pour tout $t \in [-1, 1]$ dans les deux situations suivantes :

- X est distribuée selon la Loi Géométrique $\mathscr{G}(p)$ où $p \in]0, 1[$.
  Nous rappelons que $\mathscr{G}(p)$ est la Loi Géométrique de support $\mathbb{N}^*$ de paramètre p.
- X est distribuée selon la Loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ où $\lambda > 0$.

Dans la suite du problème, nous admettrons le résultat suivant généralisant les résultats obtenus en 1b

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans N

⊙ **La connaissance de $\varphi_X(t)$ pour tout $t \in [-1, 1]$ entraîne la connaisance de la Loi de X.**
Plus précisément, φ_X est indéfiniment dérivable sur $]-1, 1[$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(X = k) = \frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{k!}$$

Des variables aléatoires dont les fonctions génératrices coïncident sur $]-1, 1]$ ont donc même Loi de probabilité.

⊙ **Si φ_X est définie sur $]-a, a[$ avec $a > 1$, les espérances de X et $X(X-1)$ valent respectivement :**

$$\mathrm{E}(X) = \varphi'_X(1) \quad \textbf{et} \quad \mathrm{E}(X(X-1)) = \varphi''_X(1)$$

PARTIE 3

On considère une suite illimitée de variables aléatoires mutuellement indépendantes $T,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ \cdots$ telle que :

- T est une variable aléatoire à valeur entière.
- Les variables $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ \cdots$ sont des variables à valeurs entières de même Loi de Probabilité.

Nous noterons également les variables $Z,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ \cdots$ définies par :

- $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_0 = 0$.
- $Z = \sum\limits_{k=1}^{T} X_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_T$ si $[T \neq 0]$ est réalisé et $Z = 0$ si $[T = 0]$ est réalisé.

1. Exprimer φ_{S_n} en fonction de φ_{X_1}.

2. Montrer que $\mathrm{P}_{[T=n]}(Z = \ell) = \mathrm{P}(S_n = \ell)$.

3. En déduire la Loi de Z dans le cas particulier $T \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(1, p)$

4. Revenons au cas général :

(a) Justifier l'égalité : $\forall t \in \left]-1, 1\right],\ \varphi_Z(t) = \sum\limits_{\ell=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}_{[T=n]}(Z = \ell) \times \mathrm{P}(T = n) \right) t^{\ell}$.

(b) En déduire : $\forall t \in \left]-1, 1\right],\ \varphi_Z(t) = \varphi_T \circ \varphi_{X_1}(t)$

(c) Nous noterons respectivement m et s^2 l'espérance et la variance de T, puis μ et σ^2 l'espérance et la variance de X_1.
Après avoir déterminé $\varphi'_Z(1)$ et $\varphi''_Z(1)$, exprimer l'espérance et la variance de Z en fonction de m, s^2, μ et σ^2.

(d) Vérifier que vous retrouvez bien les résultats obtenus à la question 3

PARTIE 4

On étudie la colonisation d'un domaine par une population de plantes d'une espèce déterminée. Chaque plante de cette espèce a au cours de sa vie, X descendants où X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Chaque plante se développe indépendamment des autres.
La $(N+1)^{\text{ème}}$génération $\mathcal{G}_{N+1}$est constituée des descendants directs des plantes de la $N^{\text{ème}}$génération $\mathcal{G}_N$.
On note Z_N et Z_{N+1} les effectifs respectifs des générations $\mathcal{G}_N$.et $\mathcal{G}_{N+1}$.
Nous pourrons donc poser : $Z_{N+1} = \sum\limits_{k=1}^{T} X_k^N = X_1^N + X_2^N + \cdots + X_{Z_N}^N$ où $X_1^N,\ X_2^N,\ X_3^N,\ X_4^N,\ \cdots$ sont des variables entières mutuellement indépendantes de même Loi que X et indépendantes de Z_N.

Nous noterons :

- $\varphi = \varphi_X$: fonction génératrice de X.
- Pour tout $N \in \mathbb{N},\ \varphi_N = \varphi_{Z_N}$: fonction génératrice de Z_N.
- Pour tout $N \in \mathbb{N},\ u_N = \mathrm{P}(Z_N = 0)$.

1. Monter que la suite $(u_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante et convergente.

2. Justifier à l'aide des résultats obtenus en partie 4 : $\forall N \in [\![1, +\infty[\![,\ u_{N+1} = \varphi(u_N)$

3. Dans cette question, nous allons supposer que chaque plante émet au cours de sa vie n graines où n est un entier donné, chacune d'entre elles ayant la probabilité p ($p \in \left]0, 1\right[$) de germer et de donner un descendant, indépendamment des autres.

(a) Quelle est la loi de X ?
Expliciter la relation $u_{N+1} = \varphi(u_N)$ vérifiée pour tout $N \in [\![1, +\infty[\![$.

(b) Pour tout $x \in \left]0, 1\right]$, on pose :

$$g(x) = (px + 1 - p)^N - x \quad \text{et} \quad h(x) = N \ln(px + 1 - p) - \ln x$$

Montrer que $g(x)$ et $h(x)$ ont même signe pour tout $x \in \left]0, 1\right]$.

(c) Calculer $h(u_1)$. Quel est son signe ?

(d) Étudier les variations de h. Dans quels cas la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vaut-elle 1 ?

4. Dans cette question, nous supposerons que X est distribuée selon une Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
La suite (u_N) vérifie donc $\forall N \in [\![1, +\infty[\![,\ u_{N+1} = \varphi(u_N) = \exp(\lambda(u_N - 1))$

(a) On suppose $\lambda \leq 1$.
Étudier sur $[0, 1]$ les variations de la fonction $\delta : x \longmapsto \varphi(x) - x$ sur $[0, 1]$.
En déduire la limite de la suite (u_N).

(b) On suppose $\lambda > 1$.

i. Étudier sur $]1, +\infty[$ les variations de la fonction $\theta : u \longmapsto 1 - \frac{\ln u}{u}$.

ii. En déduire l'existence de $\beta \in \left]0, 1\right[$, tel que $\delta'(\beta) = 0$.
Déterminer les variations de δ sur $[0, 1]$.

iii. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\varphi(\alpha) = \alpha$.

iv. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $u_N \leq \alpha$ et préciser la limite de la suite (u_N).

5. Soit $(A_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'événements, c'est à dire telle que : $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ A_N \subset A_{N+1}$.

Nous admettrons le résultat suivant : $P\left(\bigcup_{N=1}^{+\infty} A_N\right) = \lim_{N \to +\infty} P(A_N)$.

Ce résultat sera démontré dans la correction

Que représente l'événement $\bigcup_{N=1}^{+\infty} [Z_N = 0]$?

Interprétez en quelques lignes les limites obtenues dans les questions 3 et 4.

PARTIE 5

Nous nous proposons ici de simuler l'évolution de la population de plantes dans le cadre des questions 3 et 4

Nous vous proposons le script incomplet suivant :

```
#============================ Alea Binomial ============================
def ALEA_BINOMIAL(n,p):
    N=0
    for k in range(n):
        N= _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
    return N
#=========================== Liste des effectifs ========================
def Effectifs_Generations(N,ALEA):
    Effectifs=[1]
    X=1
    for k in range(N):
        S=0
        for k in range(X):
            S=S+eval(ALEA)
        X=S
        _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
    return Effectifs
#===== Recherche des zéros de f sur le segment {a,b] ===============
def Zero(f,a,b,epsilon):
    while _ _ _ _ _>epsilon:
        if _ _ _ _ _ _ _ :
            _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
        else:
            _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
    return y
#============================ Deux fonctions ============================
def h(x):
    global n,p
    return (p*x+(1-p))**n-x
def k(x):
    global Lambda
    return exp(Lambda*x-Lambda)-x
#****************************PROGRAMME PRINCIPAL*****************
print('***********************************************************')
Lambda=1.3
alpha=Zero(k,0,1,10**(-8))
print('Lambda =',str(Lambda))
print("Probabilité d'extinction : ",str(alpha))
for compteur in range(10):
    Z=Effectifs_Generations(10,'ALEA_POISSON(Lambda)')
    print(Z)
```

```
42 print('**********************************************************')
43 n=10;p=0.15
44 alpha=Zero(h,0,(1-p)/p/(n-1),10**(-8))
45 print('n = ',str(n),' et p = ',str(p))
46 print("Probabilité d'extinction : ",str(alpha))
47 for compteur in range(10):
48     Z=Effectifs_Generations(10,'ALEA_BINOMIAL(n,p)')
49     print(Z)
50 print('**********************************************************')
```

1. Compléter la ligne 5 de sorte que l'instruction `X=ALEA_BINOMIAL(n,p)` affecte à `X` une valeur entière aléatoire distribuée selon la Loi Binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

2. Compléter les lignes 20 à 24 de sorte que l'instruction `alpha=Zero(f,a,b,epsilon)` retourne l'unique zéro de la fonction f sur le segment $[a, b]$.

3. Vérifier la cohérence de la sortie suivante avec les résultats obtenue dans les questions 3 et 4.

```
**********************************************************
Lambda = 1.3
Probabilité d'extinction :  0.5770300514996052
[1, 1, 4, 6, 7, 4, 1, 1, 0, 0, 0]
[1, 7, 9, 16, 21, 32, 43, 55, 62, 76, 101]
[1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[1, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 5, 8, 18, 23]
[1, 3, 2, 3, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
[1, 3, 5, 5, 6, 3, 6, 9, 6, 6, 11]
[1, 2, 4, 5, 7, 13, 18, 22, 29, 50, 63]
[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
**********************************************************
n = 10  et p =  0.15
Probabilité d'extinction :  0.37151052637232673
[1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[1, 1, 1, 2, 3, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
[1, 4, 11, 16, 14, 17, 20, 32, 53, 76, 125]
[1, 1, 3, 6, 11, 12, 16, 16, 29, 39, 65]
[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[1, 3, 4, 9, 17, 27, 44, 72, 100, 149, 218]
[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[1, 3, 5, 6, 11, 18, 24, 40, 59, 85, 111]
[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
**********************************************************
```

- fin -