

Le premier affrontement

1. (a) R_B et R_C sont indépendants donc $P(R_B \cup R_C) = P(R_B) + P(R_C) - P(R_B \cap R_C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$

$$P(R_B \cup R_C) = \frac{2}{3}$$

(b) Il s'agit de calculer $P(\overline{R_A} \cap (R_B \cup R_C)) = P(\overline{R_A}) \times P(R_B \cup R_C)$ car $\overline{R_A}$ et $R_B \cup R_C$ sont indépendants.

D'après la question précédente, $P(\overline{R_A} \cap (R_B \cup R_C)) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

(c) R_A et $R_B \cup R_C$ sont indépendants donc $P(R_A \cap (R_B \cup R_C)) = P(R_A) \times P(R_B \cup R_C) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

$$P(R_A \cap (R_B \cup R_C)) = \frac{4}{9}$$

2. (a) def X_TIRE_SUR_Y(p):

```
tire=random()
if tire<p:
    essai=True
else:
    essai=False
return essai
```

(b) def AFFRONTLEMENT_XYZ(p,q,r):

```
A,B,C=False,False,False
if q<r:
    C=X_TIRE_SUR_Y(p)
else:
    B=X_TIRE_SUR_Y(p)
if p<r:
    C=X_TIRE_SUR_Y(q)
else:
    A=X_TIRE_SUR_Y(q)
if p<q:
    B=X_TIRE_SUR_Y(r)
else:
    A=X_TIRE_SUR_Y(r)
return A,B,C
```

Probabilités de transition

3. (a) L'événement « \mathcal{A}_{n+1} : « A est encore présent à l'issue du $n+1^e$ affrontement » est inclus dans l'événement \mathcal{A}_n ; de même pour B et C . Comme $ABC_n = \mathcal{A}_n \cap \mathcal{B}_n \cap \mathcal{C}_n$, pour tout n (y compris $n=0$) $ABC_{n+1} \subset ABC_n$. En fait, ABC_{n+1} est réalisé si A, B et C sont encore présents à l'issue du $n+1^e$ affrontement; si c'est le cas, il étaient également présents à l'issue du n^e .

Il en est de même pour $(BC_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(AC_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) Tant que A et B ne sont pas éliminés, A tire sur B qui est plus dangereux que C , et B tire sur A pour la même raison, donc personne ne tire sur C . Ainsi C ne peut être éliminé qu'après A ou B . Par conséquent $P(AB_n) = 0$, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Cet événement correspond à A, B et C n'ont pas été atteints au $n+1^e$ affrontement (sachant qu'ils n'étaient pas encore éliminés à l'issue du n^e). La probabilité cherchée est donc celle que A, B et C ratent leur n^e tir sachant qu'ils ont déjà raté les précédents.

Donc $P_{ABC_n}(ABC_{n+1}) = P_{ABC_n}(\overline{R_A^n} \cap \overline{R_B^n} \cap \overline{R_C^n}) = P_{ABC_n}(\overline{R_A^n}) \times P_{ABC_n}(\overline{R_B^n}) \times P_{ABC_n}(\overline{R_C^n}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$.

(on note R_A^n l'événement « A atteint sa cible au n^e affrontement. », $P_{ABC_n}(R_A^n) = P(R_A)$ mais les événements ne sont pas les mêmes ; remarque identique pour B et C.)

- (d) C'est la probabilité que seul A rate sa cible au $n + 1^e$ tir et que B ou C l'atteignent (A est donc atteint une fois ou deux par B ou C au moins). $P_{ABC_n}(BC_{n+1}) = P_{ABC_n}(\overline{R_A^n} \cap (R_B^n \cup R_C^n)) = \frac{2}{9}$.

De façon analogue, B est atteint par A car C tire sur A, et A n'est pas éliminé par B ; donc

$$P_{ABC_n}(AC_{n+1}) = P_{ABC_n}(R_A^n \cap \overline{R_B^n} \cup \overline{R_C^n}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

- (e) $P_{ABC_n}(A_{n+1}) = P_{ABC_n}(B_{n+1}) = 0$ car tant que les 3 joueurs sont présents, personne ne tire sur C ; il ne peut pas être éliminé.

Pour que C reste seul, il faut que A atteigne sa cible B (proba = $\frac{2}{3}$) et que B ou C atteigne A (proba égale à celle de $B \cup C$, soit $\frac{2}{3}$), les deux événements étant indépendants ; donc $P_{ABC_n}(C_{n+1}) = \frac{4}{9}$.

- (f) Si C est éliminé après B, A restant, c'est qu'au $n + 1^e$ affrontement A a touché sa cible et pas C, donc

$$P_{AC_n}(A_{n+1}) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

De même, $P_{AC_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ $P_{AC_n}(AC_{n+1}) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

$$P_{BC_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad P_{BC_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad P_{BC_n}(BC_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

- (g) Sachant que C ne peut être pris pour cible tant que A ou B n'est pas éliminé, on ne peut pas éliminer les 3 joueurs en même temps ; donc $P_{ABC_n}(O_{n+1}) = 0$.

Pour les deux derniers événements, les deux joueurs en lice à l'issue du n^e affrontement doivent atteindre leur cible, donc $P_{BC_n}(O_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ et $P_{AC_n}(O_{n+1}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

Résumé des résultats obtenus

4.

$V =$	O_{n+1}	A_{n+1}	B_{n+1}	C_{n+1}	AB_{n+1}	BC_{n+1}	AC_{n+1}	ABC_{n+1}
$P_{ABC_n}(V) =$	0	0	0	4/9	0	2/9	2/9	1/9
$P_{AC_n}(V) =$	2/9	4/9	0	1/9	0	0	2/9	0
$P_{BC_n}(V) =$	1/6	0	1/3	1/6	0	1/3	0	0

Suite du tournoi

5. (a) Le tournoi est terminé s'il ne reste plus qu'un joueur (puisque'il est impossible que les 3 disparaissent en un affrontement), la seule possibilité est donc qu'il reste uniquement C ; c'est à dire que A ait atteint sa cible ainsi que B ou C. $P(\overline{U_1}) = P(R_A \cap (R_B \cup R_C)) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, donc $P(U_1) = \frac{5}{9}$

- (b) $\bigcap_{k=1}^n ABC_k = ABC_n$ puisqu'on a une suite décroissante (pour l'inclusion) d'événements.

On utilise la formule des probabilités composées :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n ABC_k\right) = P(ABC_1) \times P_{ABC_1}(ABC_2) \times \cdots \times P_{ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_{n-1}}(ABC_n)$$

$$= P(ABC_1) \times P_{ABC_1}(ABC_2) \times \cdots \times P_{ABC_{n-1}}(ABC_n) = \left(\frac{1}{9}\right)^n$$

car pour toute valeur de k, $P_{ABC_{k-1}}(ABC_k) = \frac{1}{9}$, donc finalement $P(ABC_n) = \left(\frac{1}{9}\right)^n$.

- (c) i. $ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k = ABC_k$ donc $E_{k,n} = ABC_k \cap AC_{k+1} \cap \cdots \cap AC_n$

ii. Toujours d'après la formule des probabilités composées,

$$P(E_{k,n}) = P(ABC_k) \times P_{ABC_k}(AC_{k+1}) \times P_{AC_{k+1}}(AC_{k+2}) \times \cdots \times P_{ABC_k \cap AC_{k+1} \cap \cdots \cap AC_{n-1}}(AC_n) \\ = P(ABC_k) \times P_{ABC_k}(AC_{k+1}) \times \cdots \times P_{AC_{n-1}}(AC_n) \text{ (même raison qu'à la question 5b).}$$

Or, pour toute valeur de i , $P_{AC_i}(AC_{i+1}) = \frac{2}{9}$ et $P_{ABC_k}(AC_{k+1}) = \frac{2}{9}$, donc

$$P(E_{k,n}) = \left(\frac{1}{9}\right)^k \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k}$$

Remarque : ce résultat reste vrai pour $n = 0$, car $ABC_0 = \Omega$, de probabilité 1, c'est à dire $(1/9)^0$.

iii. $E_{k,n}$ est l'événement « Le joueur B est éliminé au $k + 1^e$ affrontement, et les joueurs A et C sont encore présents à l'issue du n^e », AC_n est l'événement « Le joueur B est éliminé avant le n^e affrontement » (“avant” est pris au sens large et on inclut l'élimination au n^e affrontement).

Par conséquent, $AC_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} E_{k,n}$.

iv. Les événements $E_{k,n}$ sont 2 à 2 incompatibles, donc $P(AC_n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(E_{k,n}) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{9}\right)^k \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k}$

$$P(AC_n) = \left(\frac{2}{9}\right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{9} \times \frac{9}{2}\right)^k = \left(\frac{2}{9}\right)^n \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$P(AC_n) = 2 \times \left(\frac{2}{9}\right)^n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

On remarque que cette formule reste valable pour $n = 1$, même si dans ce cas il n'y a qu'un événement $E_{k,n}$, ce qui ne sert pas à grand chose pour le calcul de $P(AC_1)$.

(d) Le raisonnement est identique à celui de la question 5c, mais pour le joueur A.

$$i. P(F_{k,n}) = P(ABC_k) \times P_{ABC_k}(BC_{k+1}) \times P_{BC_{k+1}}(BC_{k+2}) \times \cdots \times P_{ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \cdots \cap BC_{n-1}}(BC_n) \\ = P(ABC_k) \times P_{ABC_k}(BC_{k+1}) \times \cdots \times P_{BC_{n-1}}(BC_n)$$

Pour tout $i \in \llbracket k, n-1 \rrbracket$, $P_{BC_i}(BC_{i+1}) = \frac{1}{3}$, et $P_{ABC_k}(BC_{k+1}) = \frac{2}{9}$ donc

$$P(F_{k,n}) = \left(\frac{1}{9}\right)^k \times \frac{2}{9} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-1}$$

ii. $F_{k,n}$ est l'événement « Le joueur A est éliminé au $k + 1^e$ affrontement, et les joueurs B et C sont encore présents à l'issue du n^e », BC_n est l'événement « Le joueur A est éliminé avant le n^e affrontement »,

par conséquent, $BC_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} F_{k,n}$ et $P(BC_n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(F_{k,n}) = \frac{2}{9} \times \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{9}\right)^k \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-1}$

$$P(BC_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n$$

Comme précédemment, la formule reste valable pour $n = 1$.

(e) Le tournoi n'est pas terminé tant qu'il reste au moins deux joueurs, donc $U_n = ABC_n \cup AC_n \cup BC_n \cup AB_n$, mais AB_n est l'événement impossible d'après la question 3b, donc $U_n = ABC_n \cup AC_n \cup BC_n$.

Ces événements sont 2 à 2 incompatibles donc $P(U_n) = P(ABC_n) + P(AC_n) + P(BC_n)$

$$P(U_n) = \left(\frac{1}{9}\right)^n + 2 \times \left(\frac{2}{9}\right)^n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2 \times \left(\left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right)$$

6. (a) T_1 est l'événement « Les joueurs A et B sont éliminés à l'issue du premier affrontement », car C ne peut pas être éliminé si A et B sont encore présents. Donc $T_1 = C_1$ et $P(T_1) = \frac{4}{9}$

(b) $T_n = U_{n-1} \cap \bar{U}_n = U_{n-1} \setminus U_n$ (le jeu n'est pas terminé à l'issue du $n - 1^e$ affrontement mais il l'est à l'issue du n^e). Comme $U_n \subset U_{n-1}$ (d'après la question 3a), il vient

$$(c) P(T_n) = P(U_{n-1}) - P(U_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 2 \times \left(\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2 \times \left(\left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right) \\ = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 2 \times \left(1 - \frac{2}{9}\right) \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} - 2 \times \left(1 - \frac{1}{9}\right) \times \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

7. A gagne le tournoi à l'issue du n^{e} affrontement si B et C sont éliminés à l'issue de cet affrontement ; donc $G_A(n) = A_n \setminus \overline{T}_{n-1}$

(a) C ne pouvant être éliminé dès le premier tour, $G_A(1)$ est l'événement impossible ; $P(G_A(1)) = 0$

(b) Comme C ne peut être éliminé en premier, lorsque A gagne au n^{e} affrontement, B a nécessairement été éliminé auparavant, donc au plus tard au $n-1^{\text{e}}$ affrontement ; ainsi l'événement AC_{n-1} est réalisé ; donc

$$G_A(n) = AC_{n-1} \cap A_n$$

$$P(G_A(n)) = P(AC_{n-1}) \times P_{AC_{n-1}}(A_n) = 2 \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \times \left(\frac{4}{9}\right)$$

(c) Notons G_A l'événement « A gagne le tournoi » ; $G_A = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_A(n)$ et les événements $G_A(n)$ sont 2 à 2

incompatibles. Donc $P(G_A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(G_A(n)) = \sum_{n=2}^{\infty} P(G_A(n))$, puisque $P(G_A(1)) = 0$.

$$P(G_A) = 4 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = 4 \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{9}\right)^n - \frac{2}{9} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \right]$$

On a une somme de deux séries convergentes (géométriques de raisons $\frac{2}{9}$ et $\frac{1}{9}$) donc

$$P(G_A) = 4 \left[\left(\frac{2}{9}\right)^2 \times \frac{1}{1 - (2/9)} - \left(\frac{2}{9} \times \frac{1}{9}\right) \times \frac{1}{1 - (1/9)} \right] \text{ donc } P(G_A) = \frac{1}{7}$$

8. (a) En adoptant des notations similaires pour B , on obtient :

Pour la même raison qu'à la question 6.a, $P(G_B(1)) = 0$, puis $G_B(n) = BC_{n-1} \cap B_n$ et

$$P(G_B(n)) = P(BC_{n-1}) \times P_{BC_{n-1}}(B_n) = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \right) \times \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\text{Enfin, } P(G_B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(G_B(n)) = \sum_{n=2}^{\infty} P(G_B(n)) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{1 - (1/3)} - \left(\frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{1 - (1/9)}$$

$$P(G_B) = \frac{1}{8}$$

(b) Le raisonnement est identique, à ceci près que $P(G_C(1))$ n'est pas nul et vaut $\frac{4}{9}$ (question 3e).

Pour $n \geq 2$, $G_C(n) = (ABC_{n-1} \cap C_n) \cup (AC_{n-1} \cap C_n) \cup (BC_{n-1} \cap C_n)$ et

$$P(G_C(n)) = P(ABC_{n-1}) \times P_{ABC_{n-1}}(C_n) + P(BC_{n-1}) \times P_{BC_{n-1}}(C_n) + P(AC_{n-1}) \times P_{AC_{n-1}}(C_n) \\ = \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \times \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \right) \times \frac{1}{6} + 2 \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \times \frac{1}{9}$$

(On remarque que la formule est aussi valable pour $n = 1$) et finalement

$$P(G_C) = \sum_{n=1}^{\infty} P(G_C(n)) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{1 - (1/9)} + \left(\frac{1}{1 - (1/3)} - \frac{1}{1 - (1/9)} \right) \times \frac{1}{6} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{1 - (2/9)} - \frac{2}{9} \times \frac{1}{1 - (1/9)}$$

$$P(G_C) = \frac{67}{112}$$

Remarque : on aurait pu de façon analogue calculer $P(O)$, la probabilité que le tournoi se termine par l'élimination des 3 joueurs et que donc personne ne gagne :

$$O_n = (AC_{n-1} \cap O_n) \cup (BC_{n-1} \cap O_n) \text{ et } P(O_n) = P(AC_{n-1}) \times P_{AC_{n-1}}(O_n) + P(BC_{n-1}) \times P_{BC_{n-1}}(O_n).$$

On obtient $P(O_n) = 2 \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \times \frac{2}{9} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \times \frac{1}{6}$ et en procédant comme pour

$$A, B \text{ et } C, \text{ on trouve } P(O) = \frac{45}{336}$$

On constate alors que $P(G_A) + P(G_B) + P(G_C) + P(O) = 1$, c'est à dire la probabilité que le tournoi se termine (par une victoire ou par l'élimination des 3 protagonistes) est égale à 1, ainsi la probabilité que le tournoi continue indéfiniment est nulle, ce qui est confirmé par la question suivante.

9. (a) def AFFRONTLEMENT_MODIF_XYZ(p,q,r):

```

A,B,C=False,False,False
if p==0:
    B=X_TIRE_SUR_Y(r)
    C=X_TIRE_SUR_Y(q)
    A=True
elif q==0:
    A=X_TIRE_SUR_Y(r)
    C=X_TIRE_SUR_Y(p)
    B=True
elif r==0:
    A=X_TIRE_SUR_Y(q)
    B=X_TIRE_SUR_Y(p)
    C=True
else:
    if q<r:
        C=X_TIRE_SUR_Y(p)
    else:
        B=X_TIRE_SUR_Y(p)

    if p<r:
        C=X_TIRE_SUR_Y(q)
    else:
        A=X_TIRE_SUR_Y(q)

    if p<q:
        B=X_TIRE_SUR_Y(r)
    else:
        A=X_TIRE_SUR_Y(r)
return A,B,C

```

(b) def TOURNOI_XYZ(p,q,r):

```

A,B,C=False,False,False
Fini=(A & B)|(B & C)|(A & C)
while Fini==False:
    [A,B,C]=AFFRONTLEMENT_MODIF_XYZ(p,q,r)
    if A==True:
        p=0
    if B==True:
        q=0
    if C==True:
        r=0
    Fini=(A & B)|(B & C)|(A & C)
    print(Fini)
if A==False:
    print("A a gagné le tournoi")
elif B==False:
    print("B a gagné le tournoi")
elif C==False:
    print("C a gagné le tournoi")
else:
    print("Il n'y a pas de gagnant")
return A,B,C

```

10. (a) Z prend une valeur finie s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ telle que le tournoi se termine à l'issue du n^{e} affrontement;

$[Z = n]$ est l'événement T_n , ces événements sont 2 à 2 incompatibles donc

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [Z = n]\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(T_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 7 \times \left(\frac{2}{9}\right)^n - 16 \times \left(\frac{1}{9}\right)^n \right] \\
 &= \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{1 - (1/3)}\right) + \left(\frac{14}{9} \times \frac{1}{1 - (2/9)}\right) - \left(\frac{16}{9} \times \frac{1}{1 - (1/9)}\right) = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sous réserve de convergence, } E(Z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \times P([Z = n]) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[2n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 7n \times \left(\frac{2}{9}\right)^n - 16n \times \left(\frac{1}{9}\right)^n \right] \\ &= \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{(1 - (1/3))^2} \right) + \left(\frac{14}{9} \times \frac{1}{(1 - (2/9))^2} \right) - \left(\frac{16}{9} \times \frac{1}{(1 - (1/9))^2} \right) \\ &= \frac{51}{28} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De même } E(Z^2) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \times P([Z = n]) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[2n^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 7n^2 \times \left(\frac{2}{9}\right)^n - 16n^2 \times \left(\frac{1}{9}\right)^n \right] \\ &= \left(\frac{8}{9} \times \frac{1}{(1 - (1/3))^3} \right) + \left(\frac{14 \times 11}{9^2} \times \frac{1}{(1 - (2/9))^3} \right) - \left(\frac{16 \times 10}{9^2} \times \frac{1}{(1 - (1/9))^3} \right) = \\ &= \frac{3315}{7^2 \times 4^2} \end{aligned}$$

$$\text{D'après le théorème de Koëinig-Huygens, } V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \frac{3315}{7^2 \times 4^2} - \frac{51^2}{7^2 \times 4^2} = \frac{714}{7^2 \times 4^2} = \frac{51}{56}$$

L'écart type est égal à la racine carrée de la variance, $\sigma(Z) = \sqrt{\frac{51}{56}} \simeq 0,95$

(b) On modifie légèrement la fonction `TOURNOI_XYZ` pour compter le nombre d'affrontements réalisés.

```
def TOURNOI_XYZ(p,q,r):
    A,B,C=False,False,False
    Fini=(A & B)|(B & C)|(A & C)
    nombre=0
    while Fini==False:
        [A,B,C]=AFFRONTLEMENT_MODIF_XYZ(p,q,r)
        nombre=nombre+1
        if A==True:
            p=0
        if B==True:
            q=0
        if C==True:
            r=0
        Fini=(A & B)|(B & C)|(A & C)
    if A==False:
        print("A a gagné le tournoi")
    elif B==False:
        print("B a gagné le tournoi")
    elif C==False:
        print("C a gagné le tournoi")
    else:
        print("Il n'y a pas de gagnant")
    return nombre,A,B,C
```

ensuite on fait 10000 tournois et on compte les affrontements :

```
import numpy
p,q,r,N=2/3,1/2,1/3,10000
Affrontements=[]
for k in range(N):
    nombre,A,B,C=TOURNOI_XYZ(p,q,r)
    Affrontements.append(nombre)
moyenne=numpy.mean(Affrontements),
ecartype=numpy.std(Affrontements)
print(Affrontements)
print(moyenne)
print(ecartype)
```