Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

Correction du DM N°1

≪ Tri par insertion - Comparaison de moyennes - Inégalité de Hölder ≫

Informatique

```
from random import *

def TriInsertion(liste):
    """
    Trie la liste de nombres de manière croissante
    """
    print("La liste non triée est: ", liste, "\n")
    for i in range(1, len(liste)):

        elt = liste[i]
        position = i
        # décalage des éléments déjà  triés:
        while position > 0 and liste[position-1] > elt:
            liste[position] = liste[position-1]
            position = position - 1
        # insertion de l'élément à trier:
        if position != i:
            liste[position] = elt

n = int(input("Nombre d'éléments à trier: "))
liste=[ ]
for i in range(n):
     a=input('Entrer l''élément à trier : ')
     a=float(a)
     liste.append(a)

TriInsertion(liste)
print("La liste triée est: ", liste)
```

Exercice

- ⋆ $a(x,y)-g(x,y)=\dfrac{\sqrt{x}^2+\sqrt{y}^2}{2}-\sqrt{x\,y}=\dfrac{\sqrt{x}^2+\sqrt{y}^2-2\sqrt{x\,y}}{2}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{2}\geqslant 0$
- ⋆ $\dfrac{1}{h(x,y)}=\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}=a\Big(\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\Big)\geqslant g\Big(\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\Big)>0$, donc $h(x,y)\leqslant\dfrac{1}{g(\frac{1}{x},\frac{1}{y})}=g\big(x,y\big)$
- ⋆ $q^2\big(x,y\big)-a^2\big(x,y\big)=\dfrac{x^2+y^2}{2}-\dfrac{x^2+y^2+2\,x\,y}{4}=\dfrac{x^2+y^2-2\,x\,y}{4}=\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2\geqslant 0$

  Comme q et a sont positifs, on en déduit $q-a=\dfrac{q^2-a^2}{q+a}\geqslant 0$
- ⋆ En conclusion $\boxed{\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^*)^2\,,\ q\geqslant a\geqslant g\geqslant h}$ avec égalité si et seulement si $x=y$.

Problème

1. (a) La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \geqslant 0,\ u'(x) = m - x^{p-1}$; donc $u'(x) \geqslant 0 \iff \left(0 \leqslant x \leqslant m^{\frac{1}{p-1}}\right)$.

Ainsi u est croissante sur $\left[0, m^{\frac{1}{p-1}}\right]$ et décroissante ensuite, donc elle atteint son maximum au point d'abscisse $m^{\frac{1}{p-1}}$. Ce maximum vaut $u\left(m^{\frac{1}{p-1}}\right) = \dfrac{m^q}{q}$ $\boxed{C = \dfrac{1}{q}}$

(b) De la question précédente on déduit : $\forall x \geqslant 0,\ m\,x \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{m^q}{q}$, d'où le résultat en posant $y = m$.

En changeant de variables, c'est à dire $\lambda\,x$ et $\dfrac{y}{\lambda}$, ce qui est possible puisque λ n'est pas nul, on obtient en appliquant l'inégalité qu'on vient d'établir : $x\,y = (\lambda\,x) \times \left(\dfrac{y}{\lambda}\right) \leqslant \dfrac{(\lambda\,x)^p}{p} + \dfrac{1}{q}\left(\dfrac{y}{\lambda}\right)^q$

(c) Il suffit d'ajouter membre à membre les inégalités de même sens : $x_i\,y_i \leqslant \dfrac{\lambda^p x_i^p}{p} + \dfrac{y_i^q}{q\,\lambda^q}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$

2. (a) v est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $v'(x) = a\,x^{p-1} - \dfrac{b}{x^{q+1}}$, donc $v'(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{p+q}}$.

v est croissante sur $\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{p+q}}, +\infty\right[$, décroissante sur $\left]0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right[$ donc admet un minimum pour $x = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{p+q}}$; ce minimum vaut $v\left(\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right) = a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}}$.

(b) Le résultat de la question 1c peut s'interpréter comme : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i \leqslant v(\lambda)$ en posant $a = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^p$ et $b = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^q$.

Comme cette majoration est vraie pour tout $\lambda > 0$, elle reste donc vraie pour la valeur de λ qui minimise v, à savoir pour $\lambda = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{p+q}}$; par conséquent :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i \leqslant v\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right) = a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$