Correction du devoir n°12

Partie I

1. B est de rang 1 donc Ker B est de dimension 2 et Im B de dimension 1 : Im $B = \text{Vect}\Big({}^t(1,2,3)\Big)$ et Ker B admet pour équation cartésienne : $x + 2\,y + 3\,z = 0$.

2. (a) Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de T, on remarque que $C_1 = u \cdot \vec{u}$, $C_2 = v \cdot \vec{u}$ et $C_3 = w \cdot \vec{u}$ donc les 3 colonnes sont proportionnelles et T est au plus de rang 1 ; en fait $\text{rg}\,(T) = 1 \iff \vec{u} \neq \vec{0}$.
Bien sur si $\vec{u} = \vec{0}$, alors T est la matrice nulle ; en conclusion

$$\boxed{\text{rg}\,(T) = 1 \iff \vec{u} \neq \vec{0} \ \text{ et } \ \text{rg}\,(T) = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}}$$

(b) $T^2 = U\,{}^tU \times U\,{}^tU = U\big(\underbrace{{}^tU\,U}_{\in\mathbb{R}}\big){}^tU = \big({}^tU\,U\big)\,U\,{}^tU = \big({}^tU\,U\big)\,T$, donc T^2 est proportionnel à T.

(c) Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors T est la matrice nulle donc T admet une unique valeur propre : 0, et l'espace propre associé est $\mathbb{R}^3$.
Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors T est de rang 1 donc l'espace propre associé à 0 est de dimension 2.
D'autre part, pour tout $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $T^2\,X = T\,\big(TX\big) ={}^t U\,U\,(TX)$. Donc si TX n'est pas nul, c'est un vecteur propre pour T associé à la valeur propre ${}^tU\,U = u^2 + v^2 + w^2$. Comme T est de rang 1, tous les vecteurs TX sont colinéaires, donc $E_{{}^tU\,U}$ est de dimension 1, engendré par $T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Si } T \neq 0,\ T \text{ a deux valeurs propres : 0 et } {}^tU\,U.\ E_0 \text{ est de dimension 2 et } E_{{}^tU\,U} = \text{Vect}\big(\vec{u}\big)}$$

T est symétrique réelle donc :

$$\boxed{T \text{ est diagonalisable}}$$

On remarque que $B = U\,{}^tU$ où $U = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

3. (a) Si $w \neq 0$, les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles, si $u \neq 0$, les deux dernières colonnes ne sont pas proportionnelles, et si $v \neq 0$, la première et la troisième colonne ne sont pas proportionnelles ; par conséquent V est toujours au moins de rang 2.
D'autre part $u\,C_1 + v\,C_2 + w\,C3 = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ donc V n'est pas de rang 3, ainsi dans tous les cas :

$$\boxed{V \text{ est de rang 2}}$$

(b) On calcule le rang de la matrice $V - \lambda\,I = \begin{pmatrix}-\lambda & w & -v\\ -w & -\lambda & u\\ v & -u & -\lambda\end{pmatrix}$ si $\lambda \neq 0$, alors

$$\text{rg}\big(V - \lambda\,I\big) = \text{rg}\begin{pmatrix}-\lambda & w & -v\\ 0 & -(w^2+\lambda^2) & \lambda u - vw\\ 0 & -\lambda u + vw & -(v^2+\lambda^2)\end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \lambda\,L_2 - w\,L_1 \\ \leftarrow \lambda\,L_3 + v\,L_1\end{matrix}$$ comme $\lambda \neq 0$, $w^2 + \lambda^2 \neq 0$ et

$$\text{rg}\big(V - \lambda\,I\big) = \text{rg}\begin{pmatrix}-\lambda & w & -v\\ 0 & -(w^2+\lambda^2) & \lambda u - vw\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow (w^2+\lambda^2)L_3 + (vw - \lambda u)\,L_2\end{matrix}$$

$a = -(w^2+\lambda^2)\,(v^2+\lambda^2) - (\lambda u - vw)^2 \neq 0$, donc $V - \lambda\,I$ a même rang qu'une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls, donc qui est inversible. Ainsi, pour $\lambda \neq 0$, alors $\text{rg}\big(V - \lambda\,I\big) = 3$ et λ n'est pas valeur propre.

(c) V n'admet que 0 comme valeur propre, l'espace propre associé à 0 est de dimension 1 car V est de rang 2 ; par conséquent

$$\boxed{V \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

4. (a) ${}^tV = -V$, donc $S = -V^2 = \begin{pmatrix}v^2+w^2 & -u\,v & -v\,w\\ -u\,v & u^2+w^2 & -v\,w\\ -u\,w & -v\,w & u^2+v^2\end{pmatrix}$ et $\Omega = T$.

(b) T est diagonalisable d'après la question 2c, et $S ={}^t U\,U\,I - T$, donc S est diagonalisable.
Remarque : on pouvait se conternter de dire que S est symétrique réelle, donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

(c) Soit X un vecteur propre pour T associé à la valeur λ, on a $T\,X = \lambda\,X$, donc $S\,X = {}^t U\,U\,X - \lambda\,X = (u^2+v^2+w^2-\lambda)\,X$. Ainsi S et T ont les mêmes sous-espaces propres et

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } T \iff u^2+v^2+w^2-\lambda \text{ est valeur propre de } S.}$$

Partie II

1. Si $a=b=c$, alors $D(t) = a\,I + t\,T$ donc $\mathrm{rg}\big(D(t)-\lambda\,I\big) = \mathrm{rg}\big(t\,T - (\lambda-a)\,I\big) = \mathrm{rg}\big(T - \frac{(\lambda-a)}{t}\,I\big)$
   Par conséquent, λ est valeur propre de $D(t)$ si et seulement si $\frac{(\lambda-a)}{t}$ est valeur propre de T. Les valeurs propres de T sont 0 et $u^2+v^2+w^2$, donc celles de $D(t)$ sont a et $a+t\,(u^2+v^2+w^2)$.
   Les sous-espaces propres associés sont les mêmes que ceux de T : $E_a = \ker T$ et $E_{a+t(u^2+v^2+w^2)} = \mathrm{Vect}\,(\vec{u})$.
2. (a) i. Si X est propre pour $D(t)$ associé à λ, alors $D(t)\,X = \lambda\,X$, donc
   $(D+t\,T)\,X = \lambda\,X$, soit $\lambda\,X - T\,X = (\lambda\,I - D)\,X = t\,T\,X = t\,U\,{}^tU\,X$
   Or $(\lambda\,I-D)$ est inversible, donc par produit à gauche par $(\lambda\,I-D)^{-1}$, on obtient
   $X = t\,(\lambda\,I-D)^{-1}\,U\,{}^tU\,X$, puis ${}^tU\,X = t\,{}^tU\,(\lambda\,I-D)^{-1}\,U\,{}^tU\,X$
   ii. ${}^tU\,X \neq 0$, sinon on aurait $(\lambda\,I-D)\,X = 0$ avec $X\neq 0$, ce qui contredit l'inversibilité de $(\lambda\,I-D)$.
   De plus, ${}^tU\,(\lambda\,I-D)^{-1}\,U$ est un scalaire, donc comme ${}^tU\,X\neq 0$, on obtient : ${}^tU\,(\lambda\,I-D)^{-1}\,U = \frac{1}{t}$
   iii. $(\lambda\,I-D)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda-a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda-b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda-c}\end{pmatrix}$, donc ${}^tU\,(\lambda\,I-D)^{-1}\,U = \dfrac{u^2}{\lambda-a} + \dfrac{v^2}{\lambda-b} + \dfrac{w^2}{\lambda-c}$,
   ainsi si λ vérifie (2), alors il satisfait également (E_t).

   (b) Réciproquement, soit $\lambda\in\mathbb{R}$ vérifiant (E_t) ; on a donc $\dfrac{u^2}{\lambda-a} + \dfrac{v^2}{\lambda-b} + \dfrac{w^2}{\lambda-c} = {}^tU\,(\lambda\,I-D)^{-1}\,U = \dfrac{1}{t}$.
   Par conséquent, si λ vérifie (E_t), alors il satisfait aussi (2).
   On a montré à la question précédente que, si λ est une valeur propre de $D(t)$, alors il vérifie (E_t). Réciproquement, supposons que λ est solution de (E_t) ; on a alors ${}^tU\,(\lambda\,I-D)^{-1}\,U = \dfrac{1}{t}$. En multipliant à gauche par U, puis par t, on obtient : $t\,U\,{}^tU\,(\lambda\,I-D)^{-1}\,U = U$, ce qui prouve que U est un vecteur propre pour la matrice $t\,T\,(\lambda\,I-D)^{-1}$, associé à la valeur propre 1
   Ainsi, $t\,T\,(\lambda\,I-D)^{-1} - I$ n'est pas inversible ; or le rang d'une matrice ne change pas si on la multiplie par une matrice inversible, ici $\lambda\,I-D$), donc $\mathrm{rg}\Big(\underbrace{t\,T - (\lambda\,I-D)}_{=D(t)-\lambda\,I}\Big) < 3$. Ainsi $D(t)-\lambda\,I$ n'est pas inversible et λ est valeur propre de $D(t)$. Finalement :

$$\boxed{\text{Soit } \lambda\notin\{a,b,c\},\ \lambda \text{ est valeur propre de } D(t) \iff \lambda \text{ est solution de } (E_t)}$$

3. (E_t) admet 3 racines réelles distinctes telles que $\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \lambda_3(t)$.
   (a) $D(t)$ admet 3 valeurs propres distinctes, et ce quel que soit t, donc $D(t)$ est diagonalisable.
   Également, $D(t)$ est symétrique réelle, donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
   (b) $\lambda_i(t)$ vérifie (E_t), donc est valeur propre de $D(t)$ et vérifie (2). Ainsi ${}^tU\,(\lambda_i(t)\,I-D)^{-1}\,U = \dfrac{1}{t}$, et par produit par t puis à gauche par U : $t\,T\,(\lambda_i(t)\,I-D)^{-1}U = U$
   $(D+t\,T)\,(\lambda_i(t)\,I-D)^{-1}U = U + D\,(\lambda_i(t)\,I-D)^{-1}U$
   $= U - (\lambda_i(t)\,I-D)(\lambda_i(t)\,I-D)^{-1}U + \lambda_i(t)(\lambda_i(t)\,I-D)\,U$
   $= \lambda_i(t)(\lambda_i(t)\,I-D)\,U$ Les vecteurs $(\lambda_i(t)\,I-D)\,U$ sont donc des vecteurs propres pour $D(t)$ associés à la valeur $\lambda_i(t)$.
   (c) Les 3 vecteurs ci-dessus sont des vecteurs propres de $D(t)$, associés à des valeurs propres distinctes ; ils forment donc une famille libre et par conséquent une base de $\mathbb{R}^3$.
4. (a) On a prouvé que les valeurs propres de $D(t)$ sont les solutions de (E_t) plus éventuellement les réels a, b, c (donc ici a et c). Lorsque $a=b$, l'équation (E_t) s'écrit : $\dfrac{u^2+v^2}{\lambda-a} + \dfrac{w^2}{\lambda-c} = \dfrac{1}{t}$ On étudie les variations de la fonction $\varphi :\ \lambda \longmapsto \dfrac{u^2+v^2}{\lambda-a} + \dfrac{w^2}{\lambda-c}$, en supposant $a<c$, le cas $c<a$ étant similaire. Cette fonction est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty,a[$, $]a,c[$ et $]c,+\infty[$, tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

L'équation $\varphi(\lambda) = \frac{1}{t}$ est équivalente à la résolution de (E_t), et comme $t > 0$, elle admet 2 solutions, l'une dans l'intervalle $]-\infty, a[$ et l'autre dans $]a, c[$.

Ainsi, $D(t)$ a au moins 2 valeurs propres $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$, distinctes, avec $\lambda_1(t) < a < \lambda_2(t) < c$.

La question suivante suggère que a est également valeur propre. Or le sous-espace propre de D associé à a est le plan d'équation $z = 0$. De plus le noyau de T est le plan d'équation $u\,x + v\,y + w\,z = 0$, donc le vecteur $Y = {}^t(v, -u, 0)$ appartient à l'intersection de ces deux plans. Ainsi $D(t)\,Y = D\,Y + t\,T\,Y = a\,Y + 0$; comme dans cette partie, u, v et w sont supposés tous 3 non nuls, Y est non nul et c'est bien un vecteur propre pour $D(t)$ associé à a, donc $D(t)$ admet 3 valeurs propres distinctes.

(b) Comme $D(t)$ a 3 valeurs propres distinctes, chaque sous-espace propre est de dimension 1, donc l'espace propre associé à a est Vect (Y) où Y est le vecteur calculé à la question précédente.