Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°10 - A rendre le mardi 14 Janvier 2014

« Pseudo-solutions d'un système linéaire - Méthode des moindres carrés »

Notations

- Pour tous entiers naturels non nuls n et p, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices Ã n lignes et p colonnes à coefficients réels.
- On identifie toute matrice à 1 seule ligne et 1 seule colonne au seul réel qu'elle contient.
- La transposée d'une matrice M de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est notée ${}^tM$.
- Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par E_n l'espace vectoriel des matrices à n lignes et 1 colonne.
  - Pour tous vecteurs Y et Z de E_n, on note : $\langle Y, Z\rangle = {}^tZ\,Y$ le produit scalaire de Y et Z.
  - Pour tout vecteur Y de E_n, on note : $\|Y\| = \sqrt{\langle Y, Y\rangle} = \sqrt{{}^tY\,Y}$ la norme de Y.
  - On désigne par 0 le vecteur nul de E_n.
- Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ on note :

$$\operatorname{Ker} A = \left\{X \in E_p \middle/ AX = 0\right\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} A = \left\{Y \in E_n \middle/ \exists X \in E_p \text{ tel que } Y = AX\right\}.$$

Partie I

---

1. Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que :
   $\operatorname{Ker} A$ est un sous-espace vectoriel de E_p et $\operatorname{Im} A$ un sous-espace vectoriel de E_n.
2. Soient M une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et N une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Montrer que :
$$\operatorname{Im} MN \subset \operatorname{Im} M \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} N \subset \operatorname{Ker} MN.$$
3. Soit Y un vecteur de E_n. Montrer que : $\|Y\| = 0$ si et seulement si $Y = 0$
4. Montrer que, pour tout couple (Y, Z) de vecteurs de E_n et tout réel λ :
$$\|Y + \lambda Z\|^2 = \|Y\|^2 + 2\lambda\,{}^tZ\,Y + \lambda^2\,\|Z\|^2.$$

Dans les parties II et III, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et B un vecteur de E_n.

Partie II

---

1. Montrer que tout vecteur X de $\operatorname{Ker}{}^tA\,A$ vérifie : $\|AX\| = 0$.
2. Montrer l'égalité des deux espaces vectoriels $\operatorname{Ker}{}^tA\,A$ et $\operatorname{Ker} A$.
3. En déduire que les matrices ${}^tA\,A$ et A ont même rang puis que $\operatorname{Im}{}^tA\,A = \operatorname{Im}{}^tA$.
4. Montrer qu'il existe un vecteur X de E_p tel que : ${}^tAAX = {}^tAB$.

Partie III

On note $(\mathcal{E})$ l'équation matricielle $AX = B$ d'inconnue X appartenant à E_p.

- X est dite solution de $(\mathcal{E})$ si $AX = B$.
- X élément de E_p est dite pseudo-solution de $(\mathcal{E})$ si :

$$\forall Z \in E_p\,,\ \|AX - B\| \leq \|AZ - B\|.$$

1. On suppose que $(\mathcal{E})$ admet au moins une solution. Montrer que :
   X est une pseudo-solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si X est solution de $(\mathcal{E})$.
2. Dans cette question, on suppose que X est une pseudo-solution de $(\mathcal{E})$.
   (a) Montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall U \in E_p\ ,\ \|AX - B\| \leq \|AX - B - \lambda AU\|$.
   (b) En déduire que : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall U \in E_p\ ,\ \lambda^2 \|AU\|^2 - 2\lambda\, {}^tU\, {}^tA\ (AX - B) \geq 0$.
   (c) Montrer que : $\forall U \in E_p\ ,\ {}^tU\, {}^tA\ (AX - B) \leq 0$.
   (d) En déduire que : ${}^tAAX = {}^tAB$.
3. On suppose que : ${}^tAAX = {}^tAB$.
   Montrer que X est pseudo-solution de $(\mathcal{E})$.
4. Dans cette question, on suppose que le rang de la matrice A est égal à p.
   (a) Montrer que la matrice ${}^tAA$ est inversible.
   (b) En déduire que $(\mathcal{E})$ admet une unique pseudo-solution X .
   (c) Montrer que l'application linéaire p qui à tout vecteur Y de E_n associe $A\left({}^tAA\right)^{-1}\, {}^tAY$ est le projecteur orthogonal de E_n sur $\operatorname{Im} A$.

Application 1

n désignant ici un entier au moins égal à 2, considérons n points $M_1,\ M_2,\ \cdots\ ,\ M_n$ d'abscisses respectives $x_1,\ x_2,\ \cdots\ ,\ x_n$ non toutes égales et d'ordonnées respectives $y_1,\ y_2,\ \cdots\ ,\ y_n$ non toutes égales.
Dans le soucis d'obtenir la « meilleure droite » d'ajustement de ce nuage de points, nous vous proposons de déterminer l'unique peudo solution du système suivant :

$$(S_1) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} a + x_1\, b & = & y_1 \\ a + x_2\, b & = & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a + x_n\, b & = & y_n \end{array} \right. \quad \text{d'inconnue } \theta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que ce système s'écrit sous la forme $A\theta = Y$ en précisant dans ce cas la matrice A et la matrice Y.
2. Justifier que ce système (S_1) admet une unique pseudo-solution que nous noterons $\widehat{\theta}$.
3. Déterminer la matrice ${}^tAA$ puis son inverse $\left({}^tAA\right)^{-1}$.
4. Déterminer ${}^tAY$. En déduire $\widehat{\theta}$.
5. Notons $\overline{Y}$ la projection orthogonale de Y sur la droite de E_n dirigé par le vecteur 1_n .
   - Montrer que $\left\|Y - \overline{Y}\right\|^2 = \left\|Y - A\widehat{\theta}\right\|^2 + \left\|A\widehat{\theta} - \overline{Y}\right\|^2$
   - Vérifier que $\frac{\left\|A\widehat{\theta} - \overline{Y}\right\|^2}{\left\|Y - \overline{Y}\right\|^2}$ n'est autre que le carré du coefficient de corrélation de la série statistique double $\left(x_i, y_i\right)_{1 \leq i \leq n}$.

Application 2

Nous vous proposer de déterminer toutes les pseudo-solutions du système suivant :

$$(S_2) \quad \left\{ \begin{array}{c} a + b = 5 \\ a + b = 6 \\ a + b = 9 \\ a + c = 4 \\ a + c = 9 \\ a + c = 10 \end{array} \right. \quad \text{d'inconnue } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que ce système s'écrit sous la forme $AX = B$ en précisant la matrice A et la matrice B.
2. Déterminer les matrices ${}^tAA$ et ${}^tAB$.
3. Le système ${}^tAAX = {}^tAB$ de 3 équations à 3 inconnues est-t-il un système de Cramer ?
4. Résoudre le système ${}^tAAX = {}^tAB$ et donner toutes les pseudo-solutions de (S_2) .