Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°5 - A remettre le mardi 12 novembre 2013

« PILE ou FACE : Algèbre - Analyse - Probabilités »

Étant donné un nombre entier positif n, on procède à n jets successifs d'une pièce de monnaie, en notant à chaque jet le côté apparent : on obtient de cette façon pour cette épreuve un résultat ω, formé d'une suite de n symboles « F » ou « P ». On désigne par Ω_n l'ensemble des résultats possibles de cette épreuve et par $\mathscr{P}(\Omega_n)$ l'ensemble des parties de Ω_n.
Par exemple : $\omega = (\text{FPFF}) \in \Omega_4$.

1. Étant donné une partie A de Ω_n, on pose :

$$\mathrm{P}_n(A) = \frac{1}{2^n} \times \text{card}(A) \quad \textit{où} \quad \text{card}(A) \ \textit{désigne le nombre d'éléments de } A$$

Montrer que
- $\mathrm{P}_n(\Omega_n) = 1$.
- $\mathrm{P}_n(A \cup B) = \mathrm{P}_n(A) + \mathrm{P}_n(B)$ si A et B sont deux parties disjointes de Ω_n.

Expliquer alors pourquoi P_n est une probabilité sur $(\Omega_n, \mathscr{P}(\Omega_n))$

2. *On désigne maintenant par A_n l'ensemble des résultats ω qui ne contiennent pas trois symboles « F » successifs et l'on pose $u_n = \mathrm{P}_n(A_n)$. Nous avons donc $u_1 = u_2 = 1$; nous adopterons la convention $u_0 = 1$.*

(a) Pour $n \geq 3$, montrer que A_n est partitionné par les ensembles :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_n &= \{\omega \in A_n \ / \ \omega \text{ commence par P}\} \\ \mathcal{C}_n &= \{\omega \in A_n \ / \ \omega \text{ commence par FP}\} \\ \mathcal{D}_n &= \{\omega \in A_n \ / \ \omega \text{ commence par FFP}\} \end{aligned}$$

(b) En déduire la relation de récurrence

$$u_n = \frac{1}{2}\, u_{n-1} + \frac{1}{4}\, u_{n-2} + \frac{1}{8}\, u_{n-3} \text{ valable pour } n \geqslant 3 \tag{1}$$

3. Pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$ et tout nombre entier N, nous poserons

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} u_n\, z^n$$

(a) Soit z nombre complexe quelconque tel que $|z| < 1$

— Montrer à l'aide du résultat obtenu en 2b que pour tout entier au moins égal à 3

$$S_N(z) \times \left(8 - 4z - 2z^2 - z^3\right) = 8 + 4z + 2z^2 + R_N(z)$$

où $R_N(z)$ est une quantité que vous devez expliciter et dont vous devez montrer qu'elle tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

— En déduire que la suite $(S_N(z))_{N \geqslant 3}$ admet une limite finie lorsque N tend vers $+\infty$ et que cette limite finie vaut

$$f(z) = \frac{8 + 4z + 2z^2}{8 - 4z - 2z^2 - z^3}$$

(b) Montrer que l'équation $8 - 4z - 2z^2 - z^3 = 0$ admet une seule racine réelle α et que celle-ci est comprise entre 1 et $1,1$.

(c) Écrire en **MATLAB** ou **SCILAB** le script d'une fonction **TiTi** d'argument **h** qui renvoie une valeur approchée à **h** près de la racine réelle α.
L'appel de cette fonction dans l'instruction alpha=TiTi(0.00000001) devrait alors donner :

```
>>   alpha=TiTi(0.00000001)
alpha =
      1.08737802803516
```

(d) Montrer que les deux autres racines de l'équation $8-4z-2z^2-z^3=0$ sont des nombres complexes conjugués z_0 et $\overline{z_0}$ dont le module $|z|$ est strictement supérieur à α.

4. On désigne par $\mathbb{C}_2[X]$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par la famille $\langle 1,\, X,\, X^2 \rangle$ où $X \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ x & \to & x \end{array}$

(a) Montrer que les fonctions polynômes $(X-z_0)(X-\overline{z_0})$, $(X-\alpha)(X-z_0)$, $(X-\alpha)(X-\overline{z_0})$ constituent une base de $\mathbb{C}_2[X]$.

(b) En déduire qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{C}$ tels que :

$$f(z) = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-z_0} + \frac{\overline{B}}{z-\overline{z_0}} \text{ pour tout } z \text{ tel que } z \neq \alpha \text{ et } z \neq z_0 \text{ et } z \neq \overline{z_0}.$$

Dans la suite du problème, f désignera la fonction de variable réelle définie par :

$$\forall x \in [-1,+1],\ f(x) = \frac{8+4x+2x^2}{8-4x-2x^2-x^3} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-z_0} + \frac{\overline{B}}{x-\overline{z_0}}$$

5. On rappelle que :

$$\forall x \in [-1,1],\quad f(x) = S_N(x) - \frac{R_N(x)}{8-4x-2x^2-x^3}$$

(a) Montrer que f est n-fois dérivable en 0 et exprimer $f^{(n)}(0)$ en fonction de A, B, α et z_0.

(b) Montrer que $S_N(x)$ est la partie régulière du développement limité à l'ordre N de f au voisinage de 0.

(c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -\dfrac{A}{\alpha^{n+1}} - \dfrac{B}{z_0^{n+1}} - \dfrac{\overline{B}}{\overline{z_0}^{n+1}}$

(d) Donner un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

6. *Nous nous proposons dans cette question de retrouver les résultats précédents en utilisant exclusivement le calcul matriciel.*

On pose $V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

(a) Montrer que la relation de récurrence (1) s'écrit : $V_{n+1} = M\,V_n$ où M est une matrice à préciser.

(b) Déterminer les produits suivants :

$$M\begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M\begin{pmatrix} z_0^2 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M\begin{pmatrix} \overline{z_0}^2 \\ \overline{z_0} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) En déduire

$$MP = P\Delta \quad \text{où} \quad \Delta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\overline{z_0}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} \alpha^2 & z_0^2 & \overline{z_0}^2 \\ \alpha & z_0 & \overline{z_0} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) Justifier l'inversibilité de P puis les formules suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M^n = P\Delta^n P^{-1} \quad \text{et} \quad P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{A}{\alpha^3} \\ -\frac{B}{z_0^3} \\ -\frac{\overline{B}}{\overline{z_0}} \end{pmatrix}$$

(e) Retrouver alors le résultat : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -\dfrac{A}{\alpha^{n+1}} - \dfrac{B}{z_0^{n+1}} - \dfrac{\overline{B}}{\overline{z_0}^{n+1}}$.