Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°3 - A remettre le lundi 7 octobre 2013

« Espaces vectoriels de suites et de fonctions »

EXERCICE I

1. Soit P la fonction polynôme définie sur $\mathbb{C}$ par : $\forall x \in \mathbb{C},\ P(x) = x^3 - x^2 - 1$.

(a) Montrer que toutes les racines de P sont simples.

(b) Montrer que P admet une racine réelle, notée b et deux racines complexes conjuguées notées z et $\overline{z}$.

(c) Calculer le produit $b\,z\overline{z}$. Comparer b et $|z|$.

Pour tout entier naturel n, on note S une partie de $[\![1, n]\!]$ qui possède la propriété suivante : si $p \in S$ alors $p+1$ et $p+2$ n'appartiennent pas à S. On dit alors que S est une partie spéciale de $[\![1, n]\!]$. Par exemple, l'ensemble vide est une partie spéciale.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note t_n le nombre de parties spéciales de $[\![1, n]\!]$ et l'on note $t_0 = 1$.

(a) Calculer $t_1,\ t_2$ et t_3.

(b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $t_{n+3} = t_n + t_{n+2}$.

3. Soit V l'ensemble des suites réelles $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la propriété suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+3} = v_n + v_{n+2}$.

(a) Montrer que V est un espace vectoriel.

(b) Déterminer la dimension de E ainsi qu'une base de V.

4. Soit M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & z & \overline{z} \\ b^2 & z^2 & \overline{z}^2 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que la matrice M est inversible.

(b) Quelles sont les suites géométriques de V ?

(c) Soient α, β et γ des constantes complexes telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha\, b^n + \beta\, z^n + \gamma\, \overline{z}^n = 0$.
Montrer que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

(d) En déduire qu'il existe une constante réelle A et une constante complexe B telle que :
$\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = A\, b^n + B\, z^n + \overline{B}\, \overline{z}^n$.

5. A l'aide d'une calculatrice je trouve $t_{30} \simeq 125491,0004$.
Ecrire en MATLAB ou SCILAB le script d'une fonction qui me permette en moins d'une demi-seconde de vérifier le résultat $t_{30} = 125491$.

EXERCICE II

Dans tout le problème, n est un entier naturel et E_n désigne l'ensemble des fonctions numériques indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} = \overline{0} \qquad (1)$$

où, $\overline{0}$ désigne la fonction nulle, $f^{(0)} = f$ et $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $f^{(k)}$ désigne la dérivée k ième de f.

Première partie

1. Montrer que E_n est un espace vectoriel.

2. Déterminer l'espace E_0.

3. Nous supposerons ici n non nul

(a) Montrer que $1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$.

(b) En déduire que la fonction $W : x \mapsto e^{-x}$ est un élément de E_n.

4. f désignant une fonction indéfiniment dérivable quelconque, on désigne par g la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x)e^x$$

(a) Calculer $g^{(n)}(x)$.

(b) En déduire l'équivalence suivante : $f \in E_n \Longleftrightarrow g^{(n)} = \overline{0}$.

(c) En déduire que tout élément h de E_n est de la forme :

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k e^{-x} \end{array} \right.$$

Deuxième partie

Dans cette partie $n = 3$. On note $f_{a,b,c} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (ax^2 + bx + c)e^{-x} \end{array} \right.$

1. On note $U = f_{1,0,0}$, $V = f_{0,1,0}$ et $W = f_{0,0,1}$.
Montrer que la famille $\mathcal{B} = (U, V, W)$ est une base de E_3.

2. Montrer que l'application $\varphi : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E_3.

3. (a) Déterminer la matrice A de φ relativement à la base $\mathcal{B}$.

(b) Montrer que $(A + I)^3 = 0$ (I désigne la matrice identité).

(c) En déduire que A est inversible. Déterminer A^{-1}.

(d) Que peut-on en déduire pour φ ?

(e) Donner une primitive de $f_{a,b,c}$.

4. Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer A^m. En déduire $f_{a,b,c}^{(m)}$.