Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°12 - A rendre le mercredi 30 janvier 2013

« Intégrales généralisées - Transformation de Laplace »

On rappelle les éléments de cours suivants :

Soit a un réel quelconque et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ ou continue par morceaux sur tout segment $[a, x] \subset [a, +\infty[$.

- Si $\int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$ admet une limite finie L quand x tend vers $+\infty$, on dit que $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ est une intégrale généralisée convergente et l'on écrit :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\, dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\, dt$$

- Sinon, on dit que $\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$ est une intégrale généralisée divergente.

Notations - Généralités

- Pour chaque réel a, $\mathcal{E}_a$ désigne l'espace vectoriel des fonctions réelles f définies sur $\mathbb{R}$ et continues sur $[0, +\infty[$ telles que :

$$\forall x > a, \ \lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-xt} f(t) = 0$$

- On désigne par Transformation de Laplace, l'application qui, à toute fonction f continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et vérifiant en outre des conditions restrictives convenables, fait correspondre la fonction de variable réelle définie par l'intégrale :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-tx}\, \mathrm{d}t$$

  $\mathcal{L}(f)$ est appelée transformée de Laplace de f.

- La linéarité de l'intégrale induit la « linéarité » de la transformation de Laplace. Ainsi, pour toutes fonctions f et g admettant une transformée de Laplace définie au point x et pour tous réels λ et μ, on a :

$$\mathcal{L}(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda\, \mathcal{L}(f)(x) + \mu\, \mathcal{L}(g)(x).$$

- On admettra la propriété suivante :
  Deux fonctions f et g continues sur $\mathbb{R}$ dont les transformées de Laplace coïncident sur un intervalle du type $]a, +\infty[$ coïncident sur $[0, +\infty[$.

Partie I

1. Soit a un réel quelconque, f une fonction de $\mathcal{E}_a$ et x un réel strictement supérieur à a.
   (a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{-(x-a)t}{2}}\, \mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.
   (b) En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.
2. Pour tout réel α, on considère la fonction h_α définie sur $[0, +\infty[$ par $h_\alpha(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}$.
   Déterminer le domaine de définition et l'expression de $\mathcal{L}(h_\alpha)$.

3. On note E la fonction, qui à tout réel positif associe sa partie entière.
Vérifier que $\mathcal{L}(E)$ est définie sur $]0,+\infty[$ et établir que :

$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(E)(x) = \frac{1}{x\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)}$$

4. Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(t) = t^n$.
On note $I_n = \mathcal{L}(f_n)$.
   (a) Préciser pour tout entier naturel n, le domaine de définition I_n *(En d'autres termes, pour quelles valeurs de x, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-tx}dt$ est-elle convergente ?).*
   (b) Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, donner une relation de récurrence liant $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x)$.
   (c) En déduire une expression de $I_n(x)$ en fonction de $x$et n.

Partie II

On note $\mathcal{F}_a$ l'ensemble formé des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ dont la dérivée f' est élément de $\mathcal{E}_a$.

1. Montrer que $\mathcal{F}_a$ est inclus dans $\mathcal{E}_a$ *(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis).*
2. Soit f une fonction de $\mathcal{F}_a$ et x un réel strictement supérieur à a.
Démontrer que : $\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$.
3. On souhaite résoudre sur $\mathbb{R}$ le système differentiel :

$$\left\{\begin{array}{l} f' = -6f+9g \\ g' = -\,4f+7g \end{array}\right. \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{l} f(0) = 2 \\ g(0) = 1 \end{array}\right. \qquad (S).$$

Nous admettrons qu'un tel système admet exactement une seule solution maximale, définie sur $\mathbb{R}$.

   (a) Soit a un réel et (f,g) un couple de fonctions éléments de $\mathcal{F}_a$ dont on suppose qu'il est solution sur $\mathbb{R}$ du système differentiel (S).
      - Montrer que : $\forall x \in\,]a,+\infty[\,,\ \mathcal{L}(f)(x) = \dfrac{2x-5}{x^2-x-6}$ et $\mathcal{L}(g)(x) = \dfrac{x-2}{x^2-x-6}$.
      - Préciser les valeurs possibles de a et les expressions de f et g sur $[0,+\infty[$.
On pourra utiliser une décomposition en éléments simples ainsi que les résultats de la question 2 de la partie I.

   (b) Conclure.