Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°8 - A rendre le mercredi 28 novembre 2012

« Le tournoi de Paintball »

On considère un tournoi de Paintball entre trois joueurs A, B et C, qui se déroule en une succession d'affrontements de la façon suivante, jusqu'à élimination d'au moins deux des trois joueurs :
▷ Tous les tirs du tournoi sont des épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes.
▷ Lorsque le joueur A tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 2/3.
▷ Lorsque le joueur B tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 1/2.
▷ Lorsque le joueur C tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 1/3.
▷ Lorsque l'un des joueurs est touché, il est définitivement éliminé des affrontements suivants.
▷ À chaque affrontement, les joueurs non encore éliminés tirent simultanément et chacun d'eux vise le plus dangereux de ses rivaux non encore éliminés (ainsi, lors du premier affrontement, A vise B tandis que B et C visent A).

- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements suivants :
  - ABC_n : « À l'issue du $n^{\text{ième}}$ affrontement, A, B et C ne sont pas encore éliminés. »
  - AB_n : « À l'issue du $n^{\text{ième}}$ affrontement, seuls A et B ne sont pas encore éliminés. » (on définit de façon analogue BC_n et AC_n)
  - A_n : « À l'issue du $n^{\text{ième}}$ affrontement, seul A n'est pas encore éliminé. » (on définit de façon analogue B_n et C_n)
  - O_n : « À l'issue du $n^{\text{ième}}$ affrontement, les trois joueurs sont éliminés. »
- ABC_0 est l'événement certain et AB_0, AC_0, BC_0, A_0, B_0, C_0 et O_0 l'événement impossible.

Le premier affrontement

1. On désigne par R_A (respectivement R_B et R_C) l'événement : « A (respectivement B et C) réussit son premier tir. »

(a) Calculer $P\big(R_B \cup R_C\big)$.

(b) Montrer que la probabilité pour qu'au premier affrontement, « A rate son tir » et « B ou C réussissent leur tir » est égale à $\frac{2}{9}$.

(c) Déterminer de même la probabilité pour qu'au premier affrontement, « A réussisse son tir » et « B ou C réussissent leur tir. »

Probabilités de transition

2. (a) Montrer que $(ABC_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements.
En est-il de même des suites $(BC_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(AC_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) Expliquer pourquoi C ne peut pas être le premier éliminé. En déduire $P\big(AB_n\big)$.

(c) Justifier $P_{ABC_n}\big(ABC_{n+1}\big) = \frac{1}{9}$.

(d) Calculer $P_{ABC_n}\big(BC_{n+1}\big)$ à l'aide de la question 1, puis donner $P_{ABC_n}\big(AC_{n+1}\big)$.

(e) Calculer $P_{ABC_n}\big(A_{n+1}\big)$, $P_{ABC_n}\big(B_{n+1}\big)$ et $P_{ABC_n}\big(C_{n+1}\big)$.

(f) Calculer $P_{AC_n}\big(A_{n+1}\big)$, $P_{AC_n}\big(C_{n+1}\big)$, $P_{AC_n}\big(AC_{n+1}\big)$, $P_{BC_n}\big(B_{n+1}\big)$, $P_{BC_n}\big(C_{n+1}\big)$, et $P_{BC_n}\big(BC_{n+1}\big)$.

(g) Calculer $P_{ABC_n}\big(O_{n+1}\big)$, $P_{BC_n}\big(O_{n+1}\big)$ et $P_{AC_n}\big(O_{n+1}\big)$.

Résumé des résultats obtenus

3. Pour mieux apprécier la cohérence des résultats obtenus, nous vous proposons de résumer les résultats obtenus dans le tableau suivant

$V =$	O_{n+1}	A_{n+1}	B_{n+1}	C_{n+1}	AB_{n+1}	BC_{n+1}	AC_{n+1}	ABC_{n+1}
$P_{ABC_n}(V) =$	...	...	...	...	...	...	...	...
$P_{AC_n}(V) =$	...	...	...	...	...	...	...	...
$P_{BC_n}(V) =$	...	...	...	...	...	...	...	...

Suite du tournoi

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n l'événement : « Le tournoi n'est pas terminé à l'issue du $n^{\text{ième}}$ affrontement. ».

(a) Calculer $P(U_1)$.

(b) Soit $n \geq 2$. Calculer $P\big(ABC_1 \cap ABC_2 \cap \ldots \cap ABC_n\big)$ (on pourra utiliser la question 2.c). En déduire que $P\big(ABC_n\big) = \left(\frac{1}{9}\right)^n$.

(c) Pour $n \geq 2$, on pose :

$$E_{0,n} = AC_1 \cap AC_2 \cap \ldots \cap AC_n$$
$$\forall k \in [\![1, n-1]\!] \text{ , } E_{k,n} = ABC_1 \cap ABC_2 \cap \ldots ABC_k \cap AC_{k+1} \cap AC_{k+2} \cap \ldots \cap AC_n$$

i. Peut-on simplifier l'expression de $E_{k,n}$?

ii. Calculer $P\big(E_{kn}\big)$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

iii. Exprimer AC_n en fonction des $\big(E_{k,n}\big)_{0 \leq k \leq n-1}$.

iv. En déduire $P\big(AC_n\big)$ pour $n \geq 2$.

(d) On pose maintenant, pour $n \geq 2$:

$$F_{0,n} = BC_1 \cap BC_2 \cap \ldots \cap BC_n$$
$$\forall k \in [\![1, n-1]\!] \text{ , } F_{k,n} = ABC_1 \cap ABC_2 \cap \ldots ABC_k \cap BC_{k+1} \cap BC_{k+2} \cap \ldots \cap BC_n$$

i. Calculer $P\big(F_{k,n}\big)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

ii. En exprimant BC_n en fonction des $\big(F_{k,n}\big)_{0 \leq k \leq n-1}$, déterminer $P\big(BC_n\big)$ pour tout $n \geq 2$.

(e) Exprimer U_n en fonction des événements ABC_n, AB_n, AC_n et BC_n. En déduire que :

$$P\big(U_n\big) = \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right)$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n l'événement : « Le tournoi de termine à l'issue du $n^{\text{ième}}$ affrontement. ».

(a) Calculer $P(T_1)$.

(b) Pour tout $n \geq 2$, exprimer T_n en fonction de U_{n-1} et de U_n.

(c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ , } P(T_n) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 7\left(\frac{2}{9}\right)^n - 16\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $G_A(n)$ l'événement : « A gagne le tournoi à l'issue du $n^{\text{ième}}$ affrontement ».

(a) Calculer $P\big(G_A(1)\big)$.

(b) Exprimer $G_A(n)$ en fonction de AC_{n-1} et A_n. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ , } P\big(G_A(n)\big) = 4\left(\frac{2}{9}\right)^n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

(c) Calculer, à l'aide de la question 5.b, la probabilité que A gagne le tournoi.

7. (a) En s'inspirant de ce qui précède, calculer la probabilité que B gagne le tournoi.

(b) Déterminer enfin la probabilité que C gagne le tournoi.

8. **Partie réservée aux 5/2**

On désigne par durée du tournoi : le nombre d'affrontements auxquels ce tournoi a donné lieu.
Montrer que Z est une variable aléatoire presque sûrement finie.
Vérifier que son espérance et sa variance valent respectivement $\frac{51}{28}$ et $\frac{51}{56}$.
Que vaut l'écart-type de Z ?