Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°4 - A remettre le mercredi 10 octobre 2012

« Algèbre linéaire : Polynômes & Calculs approchés d'intégrale »

Notations : $\mathbb{E}$ désignera l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômiales .(qu'on appellera aussi simplement polynômes) de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Si n est un entier naturel, on notera :

- E_n le sous-espace de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- $f^{(n)}$ dérivée n-ième d'une fonction numérique réelle f.
- X^n la fonction qui à tout x réel associe x^n.

On désignera par Δ l'application qui à tout élément P de E associe $\Delta(P)$, défini, pour tout x réel par :

$$\Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x)$$

PARTIE A.

A.1. Montrer que Δ est un endomorphisme de E et que, pour tout n entier naturel, sa restriction à E_n définit un endomorphisme Δ_n de E_n.

A.2. Dans cette question, on suppose : $n = 3$.
Ecrire la matrice de Δ_3 dans la base $\{1, X, X^2, X^3\}$. Déterminer son image et son noyau.

A.3. n désigne dans cette question un entier naturel non nul.

A.3.a. Justifier les relations : $\Delta_n(E_n) = E_{n-1}$ et $\ker(\Delta_n) = E_0$.

A.3.b. En déduire que, pour tout polynôme Q de E_{n-1}, il existe un unique polynôme P vérifiant les relations :

$$\begin{cases} \Delta_n(P) = Q \\ \displaystyle\int_0^1 P(x)\ \mathrm{d}x = 0 \end{cases}$$

PARTIE B. *Etude d'une famille de polynômes*

Dans toute la suite du problème, on posera : $B_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel non nul, on désignera par B_n, l'unique polynôme vérifiant :

$$\begin{cases} \Delta_n(B_n) = n\ X^{n-1} \\ \displaystyle\int_0^1 B_n(x)\ \mathrm{d}x = 0 \end{cases}$$

B.1. Calculer B_1 et B_2.

B.2. Déterminer le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de B_n.

B.3.a. Montrer que pour $n \geq 2$, on a : $B_n(0) = B_n(1)$.

B.3.b. Établir que pour n non nul, la dérivée notée $B_n^{(1)}$ de la fonction polynômiale B_n vérifie la relation :

$$B_n^{(1)} = nB_{n-1}$$

Indication : on pourra, par exemple, calculer $\Delta\left(B_n^{(1)} - nB_{n-1}\right)$.

B.3.c. On pose, pour tout x réel : $S_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$
Après avoir calculé, pour tout x réel, $\Delta(S_n)(x)$ en fonction de $\Delta(B_n)(-x)$, justifier l'égalité :

$$B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$$

En déduire que, pour tout k entier naturel non nul, B_{2k+1} s'annule en $0,\ 1$ et $1/2$.

B.3.d. En s'inspirant de la méthode utilisée en B.3.c., justifier, pour n non nul et x réel :

$$B_n(x) = 2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{x}{2}\right) + B_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$$

En déduire pour k entier naturel non nul :

$$B_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-1 + 2^{1-2k}\right)\ B_{2k}(0)$$

B.4.a. Montrer que B_3 n'a pas d'autres racines que $0,\ 1/2$ et 1. En déduire qu'il ne s'annule pas sur $]0, 1/2[$; montrer ensuite, sans calculer B_4 et B_5 et à partir des tableaux de variations de B_2 et B_3, que B_4 s'annule une et une seule fois sur $]0, 1/2[$ et que B_5 ne s'annule pas sur $]0, 1/2[$.

B.4.b. Plus généralement, montrer par récurrence que, pour tout entier k non nul, B_{2k} s'annule une et une seule fois sur $]0,1/2[$ et que B_{2k+1} ne s'annule pas sur $]0,1/2[$.

B.4.c. En déduire en particulier que, pour k non nul, $|B_{2k}(x)|$ atteint son maximum sur $[0,1]$ en 0.

PARTIE C *Application au calcul approché d'une intégrale*

Dans toute cette partie, f désigne une fonction numérique de classe C^{2n} sur $[0,1]$ où n est un entier naturel non nul.

C.1. En intégrant deux fois par parties, justifier la relation :

$$\int_0^1 f^{(2)}(x)\ B_2(x)\ \mathrm{d}x = B_2(0)\ \left[\ f^{(1)}(1) - f^{(1)}(0)\ \right] - \left(\ f(0) + f(1)\ \right) + 2\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$$

C.2. Montrer que :

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}(0)}{(2k)!}\left[\ f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\ \right] + R_n$$

où :

$$R_n = \frac{1}{(2n)!}\int_0^1 f^{(2n)}(x)\ B_{2n}(x)\ \mathrm{d}x$$

Indication : On pourra procéder par récurrence sur k en exprimant R_k en fonction de R_{k+1} après avoir effectué deux intégrations par parties successives.

C.3. Justifier l'inégalité :

$$|R_n| \leq M\ \frac{|B_{2n}(0)|}{(2n)!}$$

où M désigne la borne supérieure de $\left|f^{(2n)}\right|$ sur $[0,1]$.