Mathématiques - 2 BCPST 1 - Lycée Michel Montaigne

DM N°1 - A remettre le mercredi 12 septembre 2012

« Suites et fonctions »

Partie A : Le but de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur $[-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \arcsin x - \sqrt{1-x^2} & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{2x^2 \ln x}{x^2+1} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

1. Justifier que f est une fonction de classe C^1 sur chacun des intervalles ouverts $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$.

2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et en -1.

3. (a) Soit φ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $\varphi(x) = x^2 + 2\ln x + 1$.
Étudier les variations de φ ; établir que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution β.
Justifier à l'aide de votre calculatrice l'inégalité : $0,5 \leq \beta \leq 0,6$.

(b) Pour $x > 0$, exprimer $f'(x)$ à l'aide $\varphi(x)$. Pour $x < 0$, expliciter $f'(x)$.

(c) En déduire les variations de f.

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Etudier pour $x > 0$, le signe de $2\ln x - f(x)$ et préciser sa limite lorsque x tend vers $+\infty$.

5. Construire $\mathcal{C}$ et Γ les courbes représentatives de f et de $x \mapsto 2\ln x$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie B : On se propose d'étudier l'équation $f(x) = 1$; à cet effet, on introduit la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{e}\,\exp\left(\frac{1}{2x^2}\right)$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution α et une seule, et que $1,85 \leq \alpha \leq 1,95$; placer le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse α.

2. (a) Prouver que l'équation $f(x) = 1$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.

(b) Préciser les variations de g.

(c) Montrer que l'intervalle $I = [1,85\,;\,1,95]$ est stable par g.

(d) Établir que $\forall x \in I$, $|g'(x)| \leq |g'(1,85)| \leq \dfrac{1}{3}$ et, en utilisant que $g(x) = \displaystyle\int_1^x g'(t)\mathrm{d}t + e$, montrer que $|g(x) - \alpha| \leq \dfrac{1}{3}\,|x - \alpha|$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = 1,85$.

(a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{1}{3^n}$
En déduire la limite de la suite (u_n).

(b) Donner une valeur décimale approchée de α à 10^{-3} près.

Partie C : On se propose d'étudier l'équation $f(x) = n$ où n est un entier naturel non nul.

1. Montrer que cette équation admet une solution et une seule α_n (en particulier $\alpha_1 = \alpha$).

2. Comparaison de α_n à $e^{\frac{n}{2}}$:

(a) Établir que $f(e^{\frac{n}{2}}) \leq n$ et en déduire que $\alpha_n \geq e^{\frac{n}{2}}$.

(b) Prouver que la relation $f(\alpha_n) = n$ peut s'écrire sous la forme : $\ln\left(\dfrac{\alpha_n^2}{e^n}\right) = \dfrac{n}{\alpha_n^2}$ **(1)**

(c) En déduire en utilisant 2a, que $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\sim} e^{\frac{n}{2}}$.

3. Comparaison de α_n^2 à $e^n + n$:
On écrit α_n sous la forme : $\alpha_n^2 = e^n\,(1 + \varepsilon_n)$ où $\varepsilon_n \geq 0$ **(2)**

(a) À l'aide de **(1)**, exprimer $(1 + \varepsilon_n)\ln(1 + \varepsilon_n)$ en fonction de n.

(b) Montrer que pour $t \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq (1+t)\ln(1+t) - t \leq \dfrac{t^2}{2}$

(c) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_n \leq ne^{-n} \leq \varepsilon_n + \dfrac{\varepsilon_n^2}{2}$, puis que : $0 \leq ne^{-n} - \varepsilon_n \leq \dfrac{n^2}{2}\,e^{-2\,n}$ **(3)**

(d) À l'aide de **(2)** et **(3)**, montrer que $\frac{1}{2}n\,e^{-\frac{n}{2}}$ est un équivalent de $\alpha_n - e^{\frac{n}{2}}$ lorsque $n \to +\infty$.

Question subsidiaire :

Justifier $\alpha_n^2 \underset{n\to\infty}{\sim} e^n$ et préciser la limite de $\alpha_n^2 - e^n$ lorsque $n \to +\infty$.