Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°11 - A remettre le mardi 10 janvier 2012

« Application de la réduction à l'analyse et aux probabilités »

Partie A :

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nous désignerons par Id l'application identique de $\mathbb{R}^3$

1. Discuter selon les valeurs du réel λ le rang de $f - \lambda\mathrm{Id}$.

2. Vérifier qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que : $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et Rang $(f - \lambda_k \mathrm{Id}) = 2$ pour $k = 1, 2, 3$.

3. Déterminer trois vecteurs u_1, u_2, u_3 dont la troisième coordonnée dans la base canonique vaut 1 et vérifiant : $f(u_k) = \lambda_k\, u_k$ pour $k = 1, 2, 3$.

4. Les 3/2 vérifieront que $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Les 5/2 énonceront clairement le théorème du cours sur la réduction qui les dispense de cette vérification.

5. Préciser la matrice de f dans cette base et calculer M^n en fonction de n.

Partie B :

On effectue des tirages dans trois urnes :
– Une urne blanche contient 1 boule blanche et 3 boules noires.
– Une urne noire contient 3 boules noires et 1 boule verte.
– Une urne verte contient 1 boule noire et 3 boules vertes.
Pour le premier tirage, on choisit une urne au hasard :
– On y prend une boule, on note sa couleur puis on remet la boule dans l'urne dont elle provient.
Le second tirage a lieu dans l'urne de même couleur que la première boule obtenue au premier tirage :
– On y prend une boule, on note sa couleur puis on remet la boule dans l'urne dont elle provient.
On continue ainsi en suivant le même protocole :
– le $n+1$ ième tirage s'effectue dans l'urne de même couleur que la boule obtenue au n ième tirage, et une boule est toujours remise dans l'urne dont elle provient.

Pour n entier non nul, on désigne par :
– B_n l'événement : « le n ième tirage donne une boule blanche ».
– N_n l'événement : « le n ième tirage donne une boule noire ».
– V_n l'événement : « le n ième tirage donne une boule verte ».

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = \begin{pmatrix} P(B_n) \\ P(N_n) \\ P(V_n) \end{pmatrix}$.

1. Calculer le vecteur X_1 et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_{n+1} = MX_n$.

2. En déduire les valeurs de $P(B_n)$, $P(N_n)$ et $P(V_n)$ en fonction de n et déterminer leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

Partie C :

On considère le système différentiel suivant :

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} 4u' &= u \\ 4v' &= 3u + 3v + w \\ 4w' &= v + 3w \end{cases} \quad \text{où} \quad u, v, w \text{ sont des fonctions déribables sur } \mathbb{R} \text{ telles que : } u(0) = 1 \text{ et } v(0) = 2 \text{ et } w(0) = 3$$

On pose : $\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$ et $Y'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}$

1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R},\ Y'(t) = M\,Y(t)$.

2. En déduire les solutions du système différentiel $(\mathcal{S})$.