Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°6 - A remettre le mardi 8 novembre 2011

« Séries géométriques & avatars - Probabilités »

EXERCICE N°1

Soit z un nombre complexe quelconque.

Pour tout entier p et pour tout entier $n \geqslant p$, nous poserons

$$S_n^{(p)} = \sum_{k=p}^{n} p! \binom{k}{p} z^{k-p}$$

1. Calculs préliminaires

   (a) Expliciter les termes des sommes $S_n^{(0)}$, $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$, $S_n^{(3)}$. en respectant la présentation suivante :

		terme constant		terme en z		terme en z^2			terme en z^k			terme en z^{n-3}		terme en z^{n-2}		terme en z^{n-1}		terme en z^n
$S_n^{(0)}$	$=$	?	+	?	+	?	+	$\cdots$	?	+	$\cdots$	?	+	?	+	?	+	?
$S_n^{(0)}$	$=$	?	+	?	+	?	+	$\cdots$	?	+	$\cdots$	?	+	?	+	?	+	?
$S_n^{(2)}$	$=$	?	+	?	+	?	+	$\cdots$	?	+	$\cdots$	?	+	?	+	?	+	?
$S_n^{(3)}$	$=$	?	+	?	+	?	+	$\cdots$	?	+	$\cdots$	?	+	?	+	?	+	?

   (b) Exprimer $S_n^{(1)} - zS_n^{(1)}$en fonction de $S_{n-1}^{(0)}$ et z^n.

   (c) Exprimer $S_n^{(2)} - zS_n^{(2)}$en fonction de $S_{n-1}^{(1)}$ et z^{n-1}.

   (d) Exprimer $S_n^{(3)} - zS_n^{(3)}$en fonction de $S_{n-1}^{(2)}$ et z^{n-2}.

<u>Indication</u> : nous allons dans les questions suivantes étudier les limites éventuelles de certaines suites complexes. À ce titre, nous rappelons qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes tend vers 0 si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ de leurs modules tend vers 0 et qu'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes tend vers ℓ si la suite des différences $(v_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

2. Dans cette question, nous supposerons $|z| < 1$

   (a) Le cas $p = 0$

      i. Exprimer par une formule simple $S_n^{(0)}$ en fonction de n et z selon les valeurs du paramètre z.

      ii. Montrer que la suite $\left(S_n^{(0)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. En préciser la limite notée $S^{(0)}$.

   (b) Le cas $p = 1$

      i. Rappeler la relation entre les quantités $(1-z)S_n^{(1)}$, $S_{n-1}^{(0)}$ et z^n obtenue en 1b.

      ii. En déduire que la suite $\left(S_n^{(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. En préciser la limite notée $S^{(1)}$.

   (c) Le cas $p = 2$

      i. Rappeler la relation entre les quantités $(1-z)S_n^{(2)}$, $S_{n-1}^{(1)}$ et z^{n-1} obtenue en 1c.

      ii. En déduire que la suite $\left(S_n^{(2)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. En préciser la limite notée $S^{(2)}$.

(d) Quels résultats analogues peut-on envisager pour $p = 3$?

3. Dans cette question, nous supposerons $|z| \geqslant 1$ et p un entier quelconque.

   (a) Expliciter $S_{n+1}^{(p)} - S_n^{(p)}$.

   (b) En déduire que la suite $\left(S_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

4. Énoncer en 4 lignes à l'aide du vocabulaire des séries (convergence, somme, divergence) les résultats obtenus aux questions 2 et 3.

EXERCICE N°2

Une urne contient n boules noires et 3 boules blanches B_1, B_2 et B_3 . On tire les boules les unes après les autres au hasard sans remise. On désigne par N_1 le rang de la première boule blanche tirée, par N_2 celui de la deuxième boule blanche tirée et par N_3 celui de la troisième boule blanche tirée. On désigne par R_1 le rang de la boule B_1, par R_2 celui de B_2 et par R_3 celui de B_3.

1. Proposer une modélisation des expériences (c'est-à-dire un univers Ω et une probabilité P qui rende compte des expériences).
2. Exprimer N_1 et N_3 en fonction de R_1, R_2 et R_3.
3. Montrer que R_1, R_2 et R_3 ont même loi, et déterminer cette loi.
4. Déterminer la loi du couple (R_1, R_3), puis celle du couple (N_1, N_3).
5. En déduire la loi de N_1 et calculer l'espérance de N_1.
6. Calculer l'espérance de N_3.