Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°1 - A chercher pour le mercredi 2 novembre 2011

« Révisions d'analyse, algèbre linéaire, séries numériques »

Développement asymptotique d'une suite

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on définit la fonction f_n sur $]n\,,\,+\infty\,[$ par $f_n(x) = (x-n)\ln n - x\,\ln(x-n)$.
   (a) Étudier les variations de f_n ; en déduire que l'équation $(x-n)\ln n = x\,\ln(x-n)$ admet une solution unique ; on notera x_n cette solution.
   (b) On définit ainsi une suite ; montrer que $\forall n \geqslant 2,\ x_n \in]\,n+1\,,\,n+2\,[$.
2. On pose $x_n = n + 1 + \varepsilon_n$, donc $\varepsilon_n \in]\,0\,,\,1\,[$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, puis que $\varepsilon_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

Étude d'une série

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = a > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n\,e^{-u_n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$, puis que $\forall n \geqslant 1,\ u_n < 1$.
   Quel est le sens de variation de (u_n) ?
2. (a) Montrer que (u_n) est une suite convergente de limite nulle.
   (b) Calculer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$.
   (c) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = 1$
3. En remarquant que $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = -\,u_n$, montrer que la série de terme général u_n diverge.

Équation différentielle

Soit E l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur $I =]1\,;\,+\infty[$ solutions de l'équation différentielle

$$(\star) \qquad (x-1)\,y'' - x\,y' + y = 0$$

1. Montrer que si f est une fonction de E, alors $f^{(3)}$ est définie sur I.
2. Montrer aussi que si f appartient à E, $\forall x \in I\ ,\ f^{(3)}(x) = f''(x)$, puis que f'' est solution sur I d'une équation différentielle de la forme $y' - m\,y = 0$ ($m \in \mathbb{R}$).
3. À l'aide de deux intégrations, montrer que les éléments de E sont les fonctions de la forme

$$f\ :\ x \longmapsto a\,x + b\,e^x \text{ où } (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

Étude d'un projecteur

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ deux réels donnés, $a \neq b$ et soit $P \in E$.

1. On va montrer dans cette question qu'il existe un unique couple de polynômes $(Q,R) \in \mathbb{R}_{n-2}[X] \times \mathbb{R}_1[X]$ tel que $P(X) = (X-a)\,(X-b)\,Q(X) + R(X)$.
   (a) Supposons qu'un tel couple existe ; calculer $R(a)$ et $R(b)$ et en déduire R. Conclure alors à l'unicité d'un tel couple.
   (b) Vérifier que $P - R$ (où R est le polunôme calculé à la question 1a) se factorise par $(X-a)\,(X-b)$ et conclure à l'existence du couple (Q,R).
2. Soit $\phi \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & R \end{array} \right.$ où R est le polynôme déterminé à la question 1.
   (a) Montrer que $\phi \in \mathscr{L}(E)$.
   (b) Déterminer le noyau et l'image de ϕ *(on donnera la dimension et une base pour chacun).*
   (c) Montrer que ϕ est un projecteur.
3. Dans cette question, $n = 3$. Pour $i \in [\![0,3]\!]$, on pose $P_i(X) = (X-a)^i\,(X-b)^{3-i}$.
   (a) Montrer que la famille $(P_0,\,P_1,\,P_2,\,P_3)$ est une base de E.
   (b) Écrire la matrice de ϕ dans cette base.